

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI CATANIA**

**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

**ISTITUTO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

---

---

**MARIO ZAFONTE**

**COMPORAMENTO DINAMICO ED ANALISI  
PROBABILISTICA DELLA DANNEGGIABILITA'  
NELLE STRUTTURE IN CEMENTO ARMATO  
RICADENTI IN ZONA SISMICA**

—————  
**TESI DI LAUREA**  
-----

**Relatore:**

**Chiar.mo Prof. Ing. FORTUNATO MOTTA**

---

---

**ANNO ACCADEMICO 1992-93**

# INDICE

1.	Introduzione	pag.	1
2.	I terremoti	"	5
2.1	Ipocentro ed epicentro	"	7
2.2	Le registrazioni sismiche	"	10
3	I processi stocastici	"	39
3.1	Definizione di processo stocastico	"	39
3.2	Processo aleatorio continuo con parametro discreto		44
3.2.1	Generalità	"	44
3.2.2	Media a tempi multipli e correlazione di un processo stocastico	"	48
3.3	Processi stocastici gaussiani	"	52
3.4	Processi stazionari	"	54
3.5	Densità spettrale di potenza	"	57
3.6	Processi delta-correlati	"	59
3.7	Processo di Poisson bianco	"	60
3.8	Processo di Poisson composto	"	61
3.9	Processo normale delta-correlato (Rumore bianco gaussiano)	"	64
3.10	Processo di Wiener	"	66
3.11	Operazioni sui processi stocastici	"	69
3.11.1	Limiti	"	69
3.11.2	Continuità	"	70
3.11.3	Derivata	"	71
3.11.4	Integrale di Riemann	"	72
3.11.5	Integrale di Riemann-Stieltjes	"	73

4	Modello stocastico dell'eccitazione sismica	pag.	75
4.1	Modelli disponibili in letteratura	"	76
4.2	Modello di eccitazione artificiale proposto nel presente lavoro	"	79
5	Analisi dinamica nonlineare di strutture in cemento armato e valutazione del danneggiamento	"	84
5.1	Sistemi ad un grado di libertà	"	87
5.1.1	Equazione del moto in forma incrementale	"	89
5.1.2	Procedura di integrazione al passo	"	92
5.2	Sistemi a molti gradi di libertà	"	96
5.2.1	Equazione del moto incrementale ed integrazione al passo	"	98
5.2.2	Stabilità numerica dell' algoritmo di soluzione		103
5.3	Modelli matematici nonlineari della forza di richiamo strutturale	"	105
5.3.1	Modello isteretico bilineare	"	106
5.3.2	Modello elastico-perfettamente plastico	"	108
5.3.3	Modello isteretico modificato, o di Clough	"	109
5.3.4	Modello di Takeda	"	110
5.3.5	Modello Q-isteresi	"	112
5.4	Valutazione del danneggiamento strutturale	"	113
5.4.1	Modello di Y.J. Park, A.H. Ang e Y.K. Wen	"	115
5.4.2	Modello di S.L. Roufaiel e C. Meyer	"	130
5.4.3	Modello di E. Cosenza e G. Manfredi	"	135
6	Programma di calcolo DADRA e guida d'uso	"	139
6.1	Modifiche introdotte al codice Drain-2D	"	140
6.2	Generazione degli accelerogrammi artificiali	"	143
6.3	Valutazione del danneggiamento meccanico negli elementi di trave/pilastro in c.a. soggetti ad azioni cicliche		146
6.3.1	Modello di Park, Ang e Wen	"	150
6.3.2	Modello di Roufaiel e Meyer	"	151
6.3.3	Modello di Cosenza e Manfredi	"	151
6.4	Guida all'uso del codice di calcolo DADRA	"	153

7	Applicazioni ed esempi	pag.	171
7.1	Struttura n. 1		
	Portale in cemento armato	"	176
7.1.1	Esempio 1.1 - Analisi deterministica (registrazione di S. Rocco)	"	177
7.1.2	Esempio 1.2 - Analisi deterministica (registrazione di Forgia - Cornino)	"	183
7.1.3	Esempio 1.3 - Analisi probabilistica	"	187
7.2	Struttura n. 2		
	Telaio in c.a. a due piani e due campate	"	196
7.2.1	Esempio 2.1 - Analisi deterministica	"	198
7.2.2	Esempio 2.2 - Analisi probabilistica	"	208
7.3	Struttura n. 3		
	Telaio in c.a. a cinque piani e due campate	"	219
7.3.1	Esempio 3.1 - Analisi deterministica	"	221
7.3.2	Esempio 3.2 - Analisi probabilistica	"	224
8	Conclusioni	"	244
	Appendice A.		
	Richiami di statistica, e di calcolo delle probabilità	"	249
A.1	Analisi e rappresentazione dei dati	"	249
A.1.1	Modalità, frequenza	"	251
	A.1.1.1 Poligono delle frequenze	"	256
	A.1.1.2 Distribuzione cumulata di frequenza	"	256
A.1.2	Parametri caratteristici di una distribuzione di frequenza	"	258
	A.1.2.1 Indici di posizione	"	258
	A.1.2.2 Indici di dispersione	"	259
A.1.3	Covarianza e coeff. di correlazione lineare	"	259
A.2	Eventi, insiemi e probabilità	"	261
A.2.1	Esperimento	"	261
A.2.2	Spazio campione	"	261
A.2.3	Evento	"	262
A.2.4	Evento composto	"	262

A.2.5	Eventi mutuamente esclusivi o incompatibili	pag.	263
A.2.6	Probabilità di un evento	"	263
A.2.7	Probabilità condizionata ed eventi indipendenti		267
A.3	Variabili aleatorie	"	268
A.3.1	Funzione densità di probabilità	"	269
A.3.2	Funzione di ripartizione	"	271
A.3.3	Valor medio di una variabile aleatoria	"	273
A.3.4	Varianza	"	274
A.3.5	Deviazione standard	"	274
A.3.6	Coefficiente di variazione	"	275
A.3.7	Variabile casuale standardizzata	"	275
A.3.8	Funzione di variabile aleatoria	"	276
A.3.9	Momenti di una variabile aleatoria	"	278
A.3.10	Funzione caratteristica	"	279
A.3.11	Log-funzione caratteristica	"	281
A.3.12	Relazione tra momenti e cumulanti	"	283
A.3.13	Variabile aleatoria gaussiana	"	286
A.3.14	Variabile aleatoria gaussiana standardizzata		288
A.3.15	Funzione degli errori	"	290
A.4	Variabili aleatorie multidimensionali	"	291
A.4.1	Funzione di ripartizione congiunta	"	292
A.4.2	Funzione densità di probabilità congiunta	"	292
A.4.3	Densità marginale	"	294
A.4.4	Densità di probabilità condizionata	"	295
A.4.5	Variabili aleatorie indipendenti	"	296
A.4.6	Valori caratteristici di una distribuzione bidimensionale	"	297
A.4.7	Valor medio di una funzione di variabili aleatorie	"	299
A.4.8	Matrice di covarianza e di correlazione	"	301
A.4.9	Momenti di una v.a. multidimensionale	"	302
A.4.10	Funzione caratteristica di v.a. multidim.	"	306
A.4.11	Log-funzione caratteristica di v.a. multidim.		307
	Bibliografia	"	308

## 1. Introduzione

Alla fine del secolo XIX venne decretata la fine della visione deterministica di tutti i fenomeni fisici, non più descrivibili da ben precise leggi matematiche del tipo causa-effetto, in quanto fu riconosciuto che tali fenomeni risultano affetti da più o meno spiccate aleatorietà. Gli esperimenti effettuati in vari settori delle scienze fisiche e meccaniche, mostrano infatti la casualità dei risultati, anche nel caso in cui vengano rigorosamente rispettate le regole di preparazione dell'esperimento stesso. Si può dunque affermare che l'aleatorietà è una caratteristica intrinseca di tutti i fenomeni fisici, sia naturali che realizzati dall'uomo. Nel caso in cui il grado di aleatorietà è relativamente piccolo, il problema connesso al fenomeno può sempre essere studiato con cautela mediante approcci di tipo deterministico, utilizzando i relativi valori medi dei parametri significanti e trascurando le variazioni rispetto a tali valori.

Nei problemi, invece, in cui il livello di aleatorietà è apprezzabilmente alto, è necessaria una strategia di soluzione di tipo probabilistico, onde affrontare i problemi di analisi e di progetto in modo realistico e razionale.

In particolare, nell'analisi strutturale, vi sono varie e numerose fonti di incertezze, le prime e le più significative sono quelle legate alle azioni applicate alla struttura, ma si hanno anche incertezze legate alle proprietà meccaniche dei materiali ed alle caratteristiche geometriche proprie della struttura, non ultima vi è l'incertezza legata ai modelli matematici ed ai metodi di analisi utilizzati per la valutazione del comportamento.

Poiché l'aleatorietà dovuta alle caratteristiche geometriche è in definitiva relativamente piccola ed oggi si è raggiunta una discreta conoscenza sulle proprietà dei materiali, gli studi più recenti effettuati dai ricercatori sono indirizzati alla formulazione di metodi di analisi

probabilistica, ed alla modellazione stocastica delle azioni, ed in particolare di quelli di natura sismica.

L'analisi sismica delle strutture in cemento armato presenta la necessità di mettere in conto il comportamento meccanico nonlineare del materiale.

In questo studio, è stato dato rilievo, soprattutto, alla reale natura stocastica dell'azione sismica, per cui la storia nel tempo dell'accelerazione della terra viene modellata come un processo aleatorio. Ciò perché si ritiene che non ha senso utilizzare metodi di analisi delle strutture costosi ed altamente accurati se poi si trascura la natura stocastica delle azioni.

Per la valutazione della risposta strutturale sotto un assegnato accelerogramma è stato utilizzato un apposito programma di calcolo per l'analisi dinamica di strutture in regime nonlineare, denominato DADRA, (DAmage DRain-2d), espressamente formulato prendendo spunto dal codice DRAIN-2D di Kanaan e Powell, [33]. Detto codice è stato opportunamente

integrato, modificato ed adattato allo scopo di poter effettuare le statistiche di interesse per il presente lavoro, con particolare riferimento alle modalità di danneggiamento sotto azioni ripetute dei telai in cemento armato, progettati secondo vari criteri ed in accordo con le norme vigenti e con gli Eurocodici.

## **2. I Terremoti**

Nei tempi più remoti il sisma fu visto come un evento voluto dal Fato, incontrollabile e, per le sue conseguenze spesso nefaste, quale segno dell'ira divina; il suo verificarsi fu collegato al concetto di punizione per le malefatte del genere umano.

Pur non rendendosi appieno conto della natura di tali eventi, però l'uomo ha sempre cercato di darne notizia ai posteri, ad es. nell'opera di Seneca "De Terremotu" sono riportate notizie sul terremoto del 5 febbraio del 63 d.C., verificatosi in Campania. Ma solo con l'avvento del metodo sperimentale e con l'illuminismo cartesiano (XVI secolo), l'uomo cominciò la ricerca delle cause fisiche dei terremoti con l'obiettivo di scoprire la natura del fenomeno.

I pionieri della nuova scienza riconobbero poi la necessità di raccogliere e catalogare una gran mole di fatti, nell'intento di procedere, col loro ausilio, alla conoscenza più ampia dei rapporti

che, tra essi e le variabili fisiche implicate, fosse possibile scorgere. Poterono così affiorare elementi e suggestioni, atti a guidare il pensiero scientifico alla scoperta delle cause prime del fenomeno sismico. Sulle tracce di queste salde e positive direttrici, nasceva la moderna scienza sismologica. Fra i pionieri cui è dovuta universale gratitudine per l'opera da essi realizzata ricordiamo: G. Mercalli (1850-1913), M. Baratta (1868-1935), A. Perrey, B. Gutenberg, ed altri.

A causa della propria struttura teorico-sperimentale, tale scienza costituisce il più valido, se non l'unico, strumento a disposizione per l'investigazione dei fenomeni dell'interno della terra; i dati cinematici offerti dagli stessi eventi sismici consentono di gettare uno sguardo fino nei più riposti segreti della costituzione interna del nostro globo.

La moderna sismologia ha inoltre portato una feconda influenza nei campi delle scienze geofisiche e in altre discipline tecniche tra cui l'ingegneria antisismica; questa speciale branca dell'ingegneria civile si propone infatti ed in primo luogo di diffondere tra i tecnici delle costruzioni, (ingegneri, architetti), le nozioni più aggiornate ed essenziali onde raggiungere una conoscenza non superficiale dei fenomeni sismici. In secondo luogo essa si propone, attraverso lo studio approfondito delle sollecitazioni dinamiche indotte nelle costruzioni dal terremoto, di diffondere le procedure di calcolo più efficaci da seguire nell'analisi delle strutture ricadenti in zona sismica.

### **2.1. Ipocentro ed epicentro**

I terremoti non sono altro che sequenze di oscillazioni del suolo, generalmente rapide ed ampie nelle fasi più distruttive, che si manifestano su larghe zone della crosta terrestre. Queste oscillazioni sono determinate dal sopraggiungere di moti progressivi

irradiati, direttamente o meno, da un centro profondo di perturbazione. Le zolle di suolo raggiunte dal suddetto moto ondoso, sono costrette a dislocarsi con moto alterno, la cui ampiezza massima è una funzione complessa dell'energia in gioco, della distanza che intercede fra il punto colpito ed il centro di scuotimento, nonché delle proprietà fisiche di elasticità e di struttura degli strati conduttori. Ipotizzando solo per semplicità che la crosta terrestre sia composta di una materia omogenea, di uniforme densità e di proprietà elastiche e di isotropia spaziale, sia  $F$  il centro teorico della perturbazione, (vedi figura 2.1), detto Ipocentro o Fuoco. Sotto tali ipotesi, le onde elastiche sono di forma sferica e si allontanano dal fuoco  $F$  verso la superficie della terra.

I punti del mezzo che si trovano sulla stessa superficie sferica verranno sottoposti alla stessa azione dinamica e nello stesso istante  $t$ .

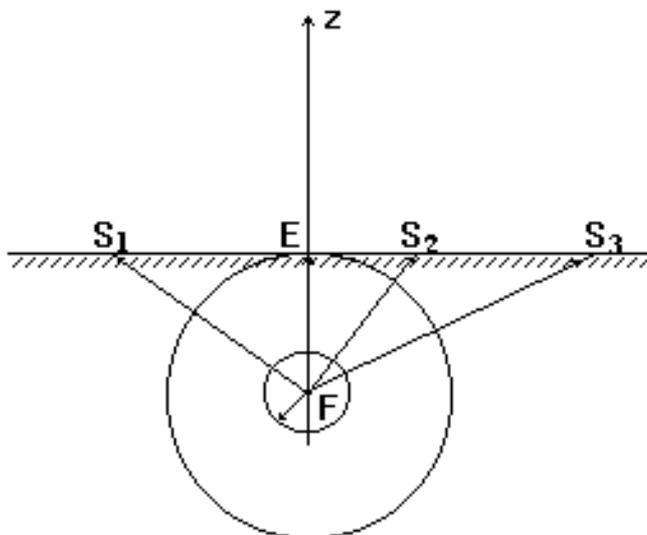


Figura 2.1 - Raggi sismici in una sezione verticale della crosta terrestre

Primo ad essere raggiunto dalla scossa sismica è il punto E detto Epicentro.

La distanza FE misura la cosiddetta profondità ipocentrale. Le curve che le onde sferiche formano con l'intersezione con la superficie terrestre sono dette isosismiche, ed essendo tutti i punti di un'isosismica equidistanti dal fuoco F, sono caratterizzati dal fatto che ricevono la scossa sismica con la medesima intensità.

La esistenza di ipocentri, ovvero di zone profonde e senza dubbio estese del sottosuolo, dalle quali scaturiscono le onde elastiche dei terremoti è legata alle incognite condizioni di equilibrio interno cui sono sottoposti gli strati della crosta terrestre.

## **2.2. Le registrazioni sismiche**

Prescindendo, in questo studio, dall'influenza che i vari strati della terra hanno sulla propagazione dell'onda sismica, secondo quanto riportato dal Gavarini, [26], ed in base all'analisi delle registrazioni sismiche, possono distinguersi 4 tipi di terremoto.

Il primo tipo è sostanzialmente costituito da un singolo urto (single shock); esso si verifica soltanto a breve distanza dall'epicentro, in suolo compatto, per terremoti poco profondi. Queste tre condizioni sono essenziali perché non vi sia l'intervento di riflessioni multiple delle onde sismiche che muterebbe profondamente la natura del moto. Rientrano ad es. in questa categoria i terremoti distruttivi di Agadir (1960) e Skopje (1963).

Il secondo tipo consiste in un moto alquanto prolungato caratterizzato da una estrema irregolarità e si verifica a media distanza dall'epicentro, in suolo compatto. Questa classe è tipica, tra l'altro, dei terremoti della California.

Il terzo tipo è caratterizzato dal prevalere di determinate frequenze, quale risultato di un filtraggio da parte dei terreni attraversati dalle successive riflessioni delle onde sismiche, (ad es. Terremoto di Mexico City, 1964).

Il quarto tipo comporta infine deformazioni permanenti molto forti nel terreno (si arriva a dislocazioni dell'ordine di metri) con fratture o liquefazione del suolo.

Da alcune registrazioni sismiche che abbiamo consultato, effettuate negli ultimi anni dall'"ENEA-PAS-ISP LABORATORIO INGEGNERIA DEI SITI" si può rilevare come la storia nel tempo dell'accelerazione della terra è diversa da posto a posto, e nello stesso sito da terremoto a terremoto. Tali registrazioni forniscono sia i valori dell'accelerazione, che della velocità

e dello spostamento nelle direzioni EW e NS. A titolo di esempio riportiamo qui di seguito alcuni valori relativi alla registrazione effettuata a Codroipo - comp. EW, in occasione del terremoto del Friuli del 06.05.1976 alle ore 20:00:13.

TAVOLA I

ENEA-PAS-ISP LABORATORIO INGEGNERIA DEI SITI

**0032 FRIULI EARTHQUAKE**

**DATE=76 05 06**

**TIME=20 00 13**

**RECORDED AT CODROIPO**

**AUTOM.DIGIT. COMP=EW**

CORR. PEAK ACCEL. = 89. CM/SEC\*\*2    UNCORR. PEAK ACCEL. = 88. CM/SEC\*\*2

17752 DIGITIZED POINTS                    43.3 SECONDS

DATA ARE BAND PASS FILTERED BETWEEN 0.30 - 0.40 AND 35. - 37. HZ

4438 POINTS INSTRUMENT AND BASELINE CORRECTED DATA

AT EQUALLY-SPACED INTERVALS OF 0.00976 SEC

**ACCELERATION      CM/SEC\*\*2**

-0.248	1.639	2.096	4.169	4.676	3.033	3.623	5.721
5.659	3.696	2.384	3.308	5.143	4.903	2.202	-0.053
0.957	3.960	4.793	3.393	3.071	3.653	3.592	3.548
3.456	2.454	0.945	0.006	0.611	2.024	1.714	-1.069
-3.977	-4.235	-2.134	-0.723	-0.356	1.202	3.099	3.594
3.510	3.333	3.806	5.954	7.009	4.337	0.321	-2.263
-2.879	-1.451	1.368	4.568	6.956	7.313	6.439	5.096
1.873	-2.341	-4.071	-3.454	-4.281	-7.406	-8.198	-3.769
1.312	2.949	2.942	2.307	1.152	1.394	1.487	-0.591
-1.712	-0.937	-1.081	-1.585	-0.430	2.095	3.708	2.166
0.923	4.906	9.689	8.372	2.281	-4.038	-7.690	-6.955
-2.084	4.697	8.651	6.963	5.066	7.384	8.982	6.482
2.477	-2.180	-6.434	-7.194	-5.861	-5.820	-5.290	-2.315
-0.468	-2.280	-4.285	-2.792	1.497	4.761	3.572	-0.719
-3.930	-4.505	-2.171	2.571	6.717	8.415	7.159	2.694
-1.768	-3.864	-4.375	-2.592	-1.399	-4.194	-4.479	0.277
3.106	5.303	9.306	8.314	2.099	-3.337	-6.578	-6.253
-3.099	-0.350	3.140	5.627	2.875	-1.132	-1.645	0.624
3.745	3.944	0.502	-2.615	-4.982	-6.685	-6.025	-4.599
-2.795	-0.408	-0.632	-2.442	-2.880	-3.209	-2.468	0.069
0.789	-0.870	-3.395	-6.008	-6.528	-5.634	-4.899	-2.378
1.474	3.830	2.367	-4.817	-12.472	-12.464	-5.809	2.677
9.696	12.027	10.921	9.189	6.510	2.930	-1.179	-4.045
-4.898	-9.148	-14.983	-12.281	-3.658	4.118	12.106	14.384
6.839	-0.343	-2.480	-3.391	-3.466	-4.188	-6.183	-6.608
-5.313	-2.044	2.457	4.779	6.551	8.468	6.676	3.601
2.338	0.465	-1.653	-2.962	-4.181	-4.651	-4.556	-2.284
1.640	-0.434	-6.725	-7.272	-3.364	2.134	9.573	11.079
4.063	-3.628	-8.469	-8.074	-3.157	-2.463	-5.088	-3.033
0.596	2.534	5.504	6.438	2.299	-2.551	-4.664	-4.787
-3.479	-0.690	1.102	-0.374	-1.862	-0.705	1.301	5.053
10.096	10.510	6.129	1.554	-3.040	-6.886	-7.564	-6.075
-3.859	-2.185	-2.512	-3.120	-2.241	-0.165	3.154	5.406
3.494	-0.739	-4.010	-5.115	-3.398	-0.401	1.440	2.945
5.179	6.943	8.046	8.390	5.946	1.470	-0.695	0.422
1.505	-0.104	-4.465	-8.049	-7.747	-7.524	-10.507	-10.721
-5.079	0.313	0.762	-3.969	-11.008	-14.197	-12.877	-12.429
-12.229	-8.422	-3.052	0.693	3.283	6.529	10.537	12.677

TAVOLA II

ENEA-PAS-ISP LABORATORIO INGEGNERIA DEI SITI

**0032 FRIULI EARTHQUAKE**

**DATE=76 05 06**

**TIME=20 00 13**

**RECORDED AT CODROIPO**

**AUTOM.DIGIT. COMP=EW**

CORR. PEAK VELOC. = 6.9 CM/SEC

17752 DIGITIZED POINTS 43.3 SECONDS

DATA ARE BAND PASS FILTERED BETWEEN 0.30 - 0.40 AND 35. - 37. HZ

4438 POINTS INSTRUMENT AND BASELINE CORRECTED DATA

AT EQUALLY-SPACED INTERVALS OF 0.00976 SEC

<u>VELOCITY</u>	<u>CM/SEC</u>						
1.030	1.021	1.003	0.973	0.927	0.890	0.860	0.814
0.756	0.710	0.682	0.656	0.614	0.562	0.527	0.518
0.517	0.492	0.447	0.407	0.377	0.344	0.308	0.273
0.239	0.209	0.192	0.189	0.187	0.174	0.153	0.149
0.175	0.217	0.249	0.262	0.267	0.264	0.242	0.209
0.174	0.141	0.107	0.060	-0.006	-0.064	-0.086	-0.075
-0.048	-0.025	-0.024	-0.053	-0.111	-0.182	-0.250	-0.307
-0.343	-0.340	-0.306	-0.268	-0.233	-0.177	-0.096	-0.035
-0.025	-0.048	-0.077	-0.104	-0.120	-0.131	-0.147	-0.152
-0.139	-0.126	-0.117	-0.103	-0.092	-0.100	-0.130	-0.161
-0.173	-0.197	-0.272	-0.365	-0.419	-0.409	-0.349	-0.274
-0.227	-0.240	-0.309	-0.389	-0.445	-0.503	-0.586	-0.664
-0.708	-0.710	-0.667	-0.597	-0.533	-0.477	-0.421	-0.383
-0.372	-0.361	-0.327	-0.289	-0.282	-0.315	-0.360	-0.374
-0.350	-0.306	-0.271	-0.272	-0.319	-0.395	-0.474	-0.524
-0.527	-0.498	-0.456	-0.420	-0.404	-0.378	-0.331	-0.309
-0.328	-0.367	-0.439	-0.532	-0.584	-0.576	-0.526	-0.459
-0.413	-0.397	-0.409	-0.455	-0.501	-0.507	-0.491	-0.484
-0.506	-0.548	-0.571	-0.559	-0.522	-0.464	-0.400	-0.348
-0.311	-0.296	-0.294	-0.278	-0.252	-0.222	-0.192	-0.180
-0.187	-0.188	-0.168	-0.121	-0.058	0.002	0.053	0.091
0.095	0.067	0.033	0.041	0.129	0.258	0.350	0.366
0.302	0.192	0.079	-0.019	-0.097	-0.144	-0.152	-0.125
-0.081	-0.017	0.104	0.246	0.324	0.321	0.242	0.104
-0.005	-0.032	-0.016	0.013	0.047	0.083	0.134	0.198
0.257	0.295	0.293	0.255	0.201	0.126	0.049	0.000
-0.028	-0.043	-0.036	-0.014	0.021	0.065	0.111	0.147
0.149	0.136	0.172	0.247	0.300	0.308	0.250	0.141
0.063	0.063	0.125	0.211	0.266	0.288	0.326	0.370
0.380	0.365	0.327	0.264	0.219	0.221	0.259	0.306
0.348	0.369	0.364	0.359	0.372	0.386	0.383	0.355
0.279	0.173	0.091	0.054	0.060	0.111	0.184	0.251
0.300	0.328	0.350	0.378	0.406	0.418	0.404	0.360
0.313	0.300	0.324	0.371	0.415	0.433	0.427	0.406
0.366	0.306	0.233	0.152	0.079	0.043	0.042	0.045
0.034	0.025	0.046	0.109	0.189	0.261	0.348	0.456
0.537	0.557	0.547	0.559	0.633	0.761	0.894	1.016
1.138	1.242	1.297	1.307	1.288	1.241	1.157	1.041
0.919	0.801	0.680	0.548	0.402	0.257	0.142	0.057

TAVOLA III

ENEA-PAS-ISP LABORATORIO INGEGNERIA DEI SITI

**0032 FRIULI EARTHQUAKE**

**DATE=76 05 06**

**TIME=20 00 13**

**RECORDED AT CODROIPO**

**AUTOM.DIGIT. COMP=EW**

CORR. PEAK DISPL. = -1.27 CM/SEC

17752 DIGITIZED POINTS

43.3 SECONDS

DATA ARE BAND PASS FILTERED BETWEEN 0.30 - 0.40 AND 35. - 37. HZ

4438 POINTS INSTRUMENT AND BASELINE CORRECTED DATA

AT EQUALLY-SPACED INTERVALS OF 0.00976 SEC

**DISPLACEMENT    CM**

-0.018	-0.028	-0.038	-0.048	-0.057	-0.066	-0.074	-0.082
-0.090	-0.097	-0.104	-0.110	-0.117	-0.122	-0.128	-0.133
-0.138	-0.143	-0.147	-0.152	-0.155	-0.159	-0.162	-0.165
-0.167	-0.170	-0.172	-0.173	-0.175	-0.177	-0.179	-0.180
-0.182	-0.183	-0.186	-0.188	-0.191	-0.193	-0.196	-0.198
-0.200	-0.202	-0.203	-0.204	-0.204	-0.204	-0.203	-0.202
-0.201	-0.201	-0.201	-0.200	-0.200	-0.198	-0.196	-0.193
-0.190	-0.187	-0.184	-0.181	-0.178	-0.176	-0.175	-0.174
-0.174	-0.174	-0.173	-0.172	-0.171	-0.170	-0.169	-0.167
-0.166	-0.164	-0.163	-0.162	-0.161	-0.160	-0.159	-0.158
-0.156	-0.154	-0.152	-0.149	-0.145	-0.141	-0.137	-0.134
-0.132	-0.130	-0.127	-0.124	-0.120	-0.115	-0.110	-0.103
-0.097	-0.090	-0.083	-0.077	-0.071	-0.066	-0.062	-0.058
-0.054	-0.051	-0.048	-0.045	-0.042	-0.039	-0.036	-0.032
-0.028	-0.025	-0.022	-0.020	-0.017	-0.013	-0.009	-0.004
0.001	0.006	0.011	0.015	0.019	0.023	0.026	0.029
0.032	0.036	0.040	0.044	0.050	0.056	0.061	0.066
0.070	0.074	0.078	0.082	0.087	0.092	0.097	0.101
0.106	0.111	0.117	0.122	0.128	0.132	0.137	0.140
0.143	0.146	0.149	0.152	0.155	0.157	0.159	0.161
0.163	0.164	0.166	0.168	0.168	0.169	0.168	0.168
0.167	0.166	0.165	0.165	0.164	0.163	0.160	0.156
0.153	0.150	0.149	0.149	0.149	0.150	0.152	0.153
0.154	0.155	0.154	0.153	0.150	0.147	0.144	0.142
0.142	0.142	0.142	0.142	0.142	0.141	0.140	0.139
0.136	0.134	0.131	0.128	0.126	0.124	0.123	0.123
0.123	0.124	0.124	0.124	0.124	0.124	0.123	0.122
0.120	0.119	0.117	0.115	0.113	0.110	0.107	0.105
0.104	0.103	0.103	0.101	0.099	0.096	0.093	0.089
0.086	0.082	0.079	0.076	0.074	0.071	0.069	0.066
0.063	0.060	0.056	0.052	0.049	0.045	0.041	0.038
0.035	0.032	0.031	0.031	0.030	0.029	0.028	0.026
0.023	0.020	0.017	0.013	0.009	0.005	0.001	-0.003
-0.006	-0.009	-0.012	-0.015	-0.019	-0.023	-0.027	-0.032
-0.035	-0.039	-0.041	-0.043	-0.044	-0.045	-0.045	-0.046
-0.046	-0.046	-0.047	-0.047	-0.049	-0.051	-0.054	-0.058
-0.063	-0.068	-0.074	-0.079	-0.085	-0.091	-0.100	-0.109
-0.119	-0.131	-0.143	-0.156	-0.169	-0.181	-0.193	-0.204
-0.213	-0.222	-0.229	-0.235	-0.240	-0.243	-0.245	-0.246

Per una migliore lettura di tali dati, che potrebbero apparire come un insieme di numeri apparentemente senza significato, seppure no, sono stati tracciati i relativi grafici che per contro, a colpo d'occhio, consentono di individuare il valore massimo dell'accelerazione, della velocità o dello spostamento, oltre che l'istante in cui essi si verificano, le varie fasi del terremoto, ecc.

In figura 2.2 sono riportati ad es. i grafici relativi all'accelerazione, alla velocità ed allo spostamento riferiti alla registrazione di Codroipo comp. EW, del 06.05.1976 - h 20:00:13. Della stessa registrazione nella figura 2.3 vengono inoltre raccolti i valori dell'accelerazione per classi di ampiezza pari a  $5 \text{ cm/sec}^2$ , ed è tracciato l'istogramma delle frequenze relative dal quale si deduce che la storia nel tempo dell'accelerazione della terra è a media nulla.

Dalla fig. 2.4 in poi, sono riportati i grafici relativi alla storia nel tempo dell'accelerazione della terra per alcuni dei terremoti verificatisi negli ultimi anni in Italia, secondo le registrazioni effettuate dall'ENEA.

Dall'analisi di tali grafici è possibile desumere che in generale il terremoto è caratterizzato da tre fasi, a conferma di quanto scrive il Casciati, [50]. Una prima fase di intensità crescente, una seconda fase di moto intenso, ed una terza di intensità decrescente. Da ciò, come meglio diremo più avanti, la necessità di modellare il terremoto come un processo stocastico nonstazionario.

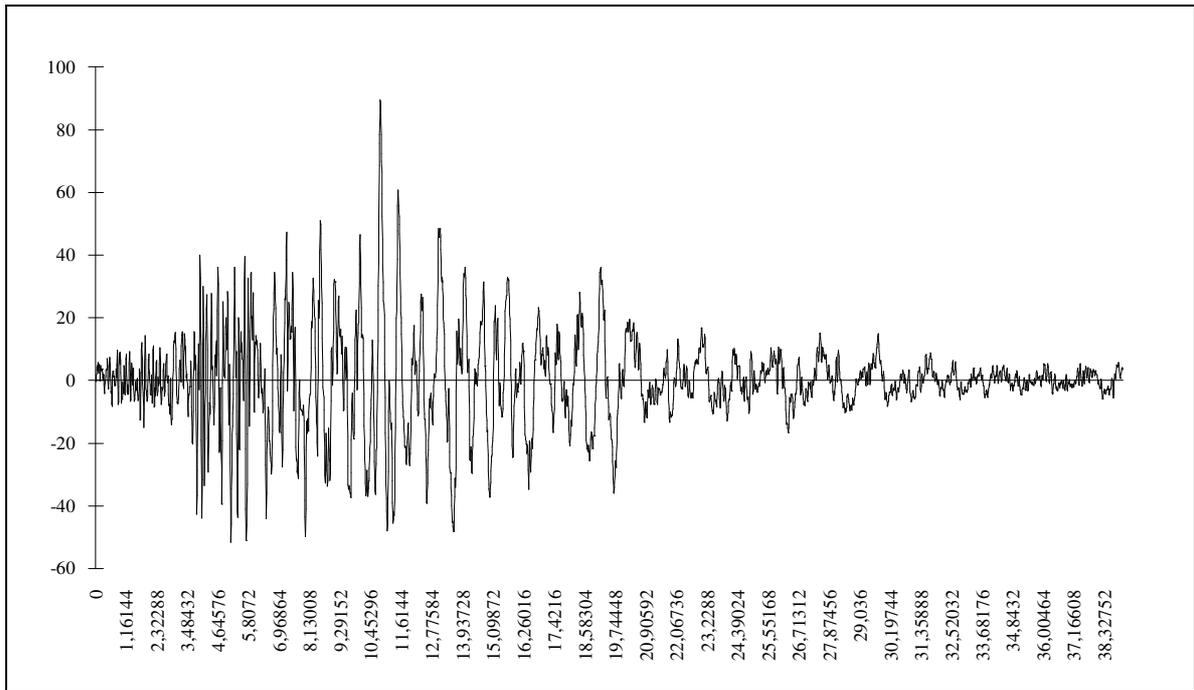


Figura 2.2.a - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Codroipo.  
Comp. EW. 06/05/1976. h20:00:13.

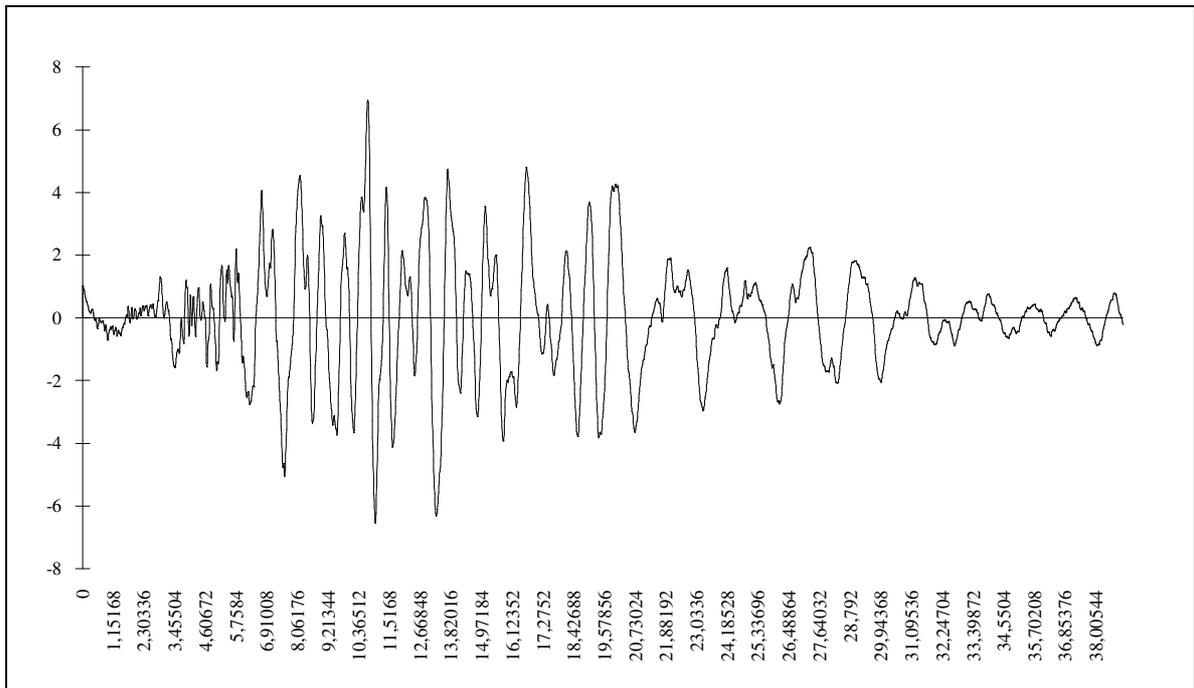


Figura 2.2.b - Velocità (cm/sec). Registrazione di Codroipo.  
Comp. EW. 06/05/1976. h20:00:13.

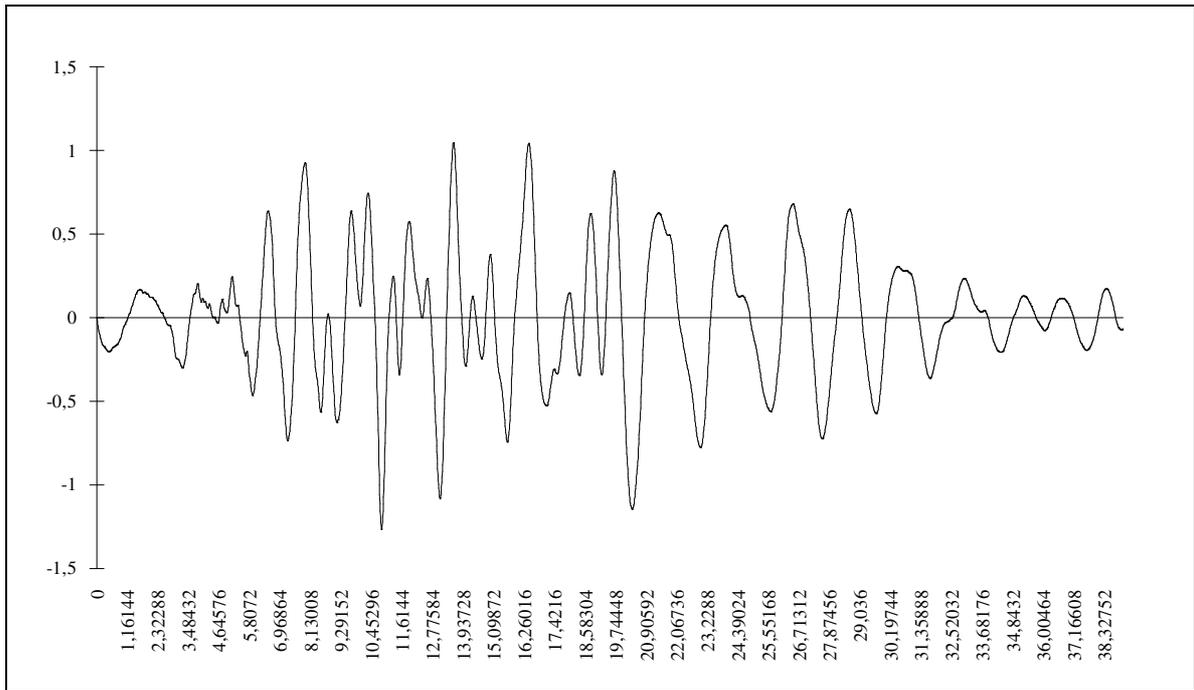


Figura 2.2.c - Spostamento (cm). Registrazione di Codroipo.  
Comp. EW. 06/05/1976. h20:00:13.

Classe	Frequenza assoluta	Frequenza relativa
-60 / -55	0	0
-55 / -50	3	0,0006758
-50 / -45	14	0,0031539
-45 / -40	23	0,0051813
-40 / -35	37	0,0083352
-35 / -30	56	0,0126155
-30 / -25	80	0,0180221
-25 / -20	106	0,0238793
-20 / -15	121	0,0272584
-15 / -10	179	0,0403244
-10 / -5	411	0,0925884
-5 / 0	1223	0,2755125
0 / 5	1129	0,2543366
5 / 10	420	0,0946159
10 / 15	215	0,0484343
15 / 20	159	0,0358189
20 / 25	78	0,0175715
25 / 30	56	0,0126155
30 / 35	61	0,0137418
35 / 40	19	0,0042802
40 / 45	9	0,0020275
45 / 50	18	0,0040551
50 / 55	6	0,0013517
55 / 60	4	0,0009011
60 / 65	1	0,0002253
65 / 70	3	0,0006758
70 / 75	1	0,0002253
75 / 80	3	0,0006758
80 / 85	2	0,0004506
85 / 90	2	0,0004506

somma=4439

somma=1 MEDIA=0,0388989

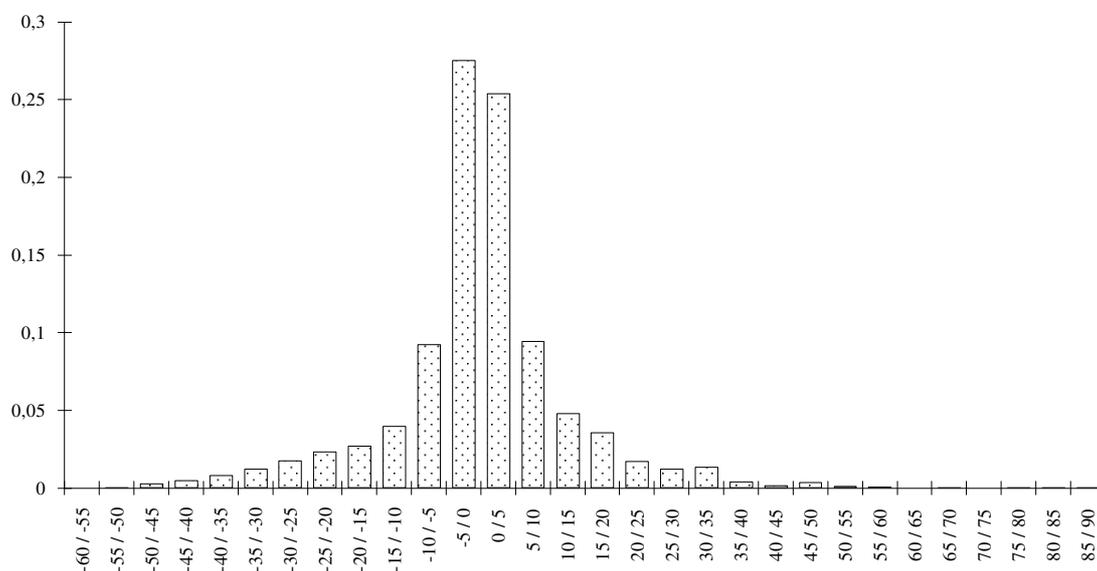


Figura 2.3 - Istogramma delle frequenze relative - Accelerazione. Registrazione di Codroipo. 06/05/1976. h20:00:13.

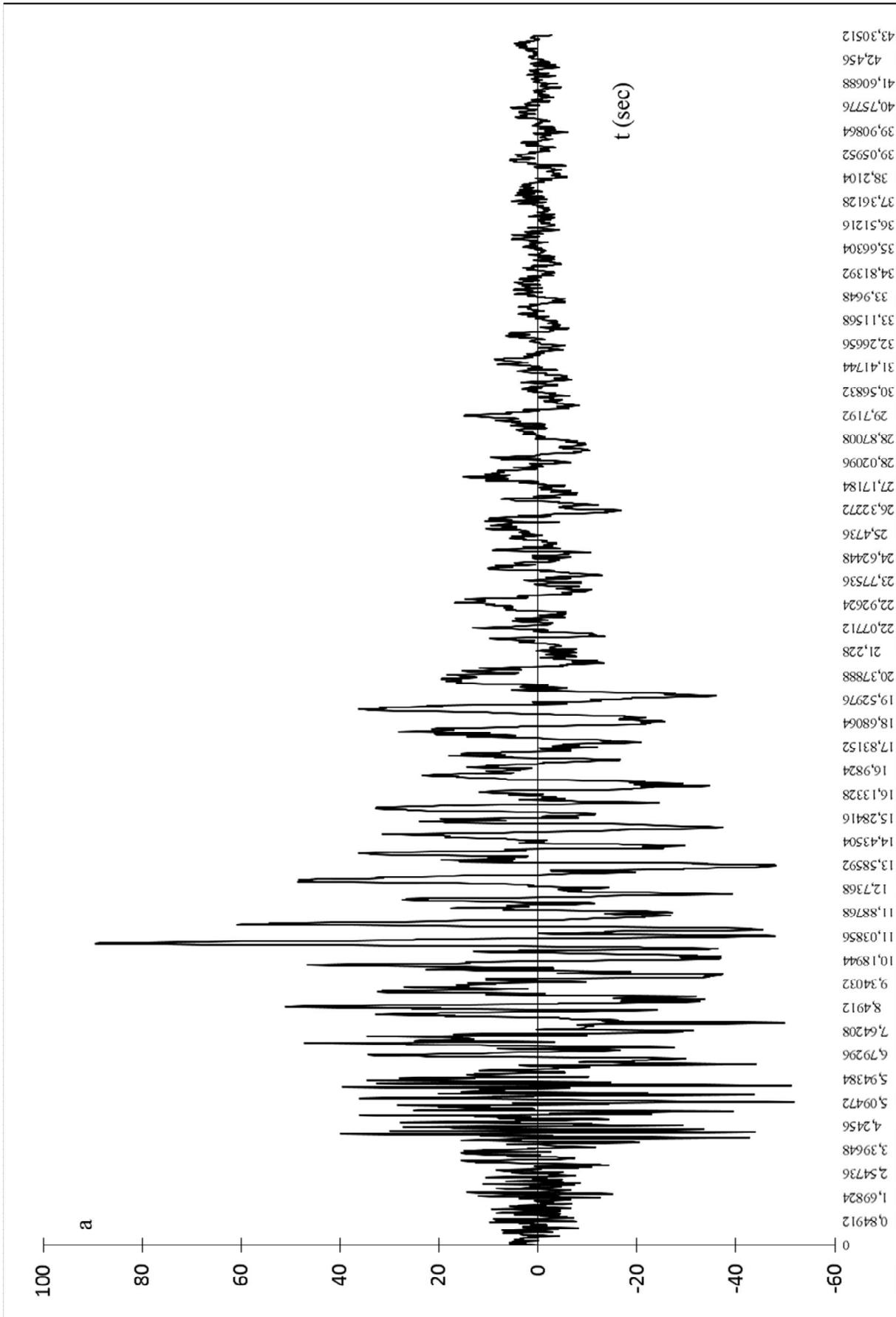


Figura 2.4 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Codroipo.  
Comp. EW. 06/05/1976. h20:00:13

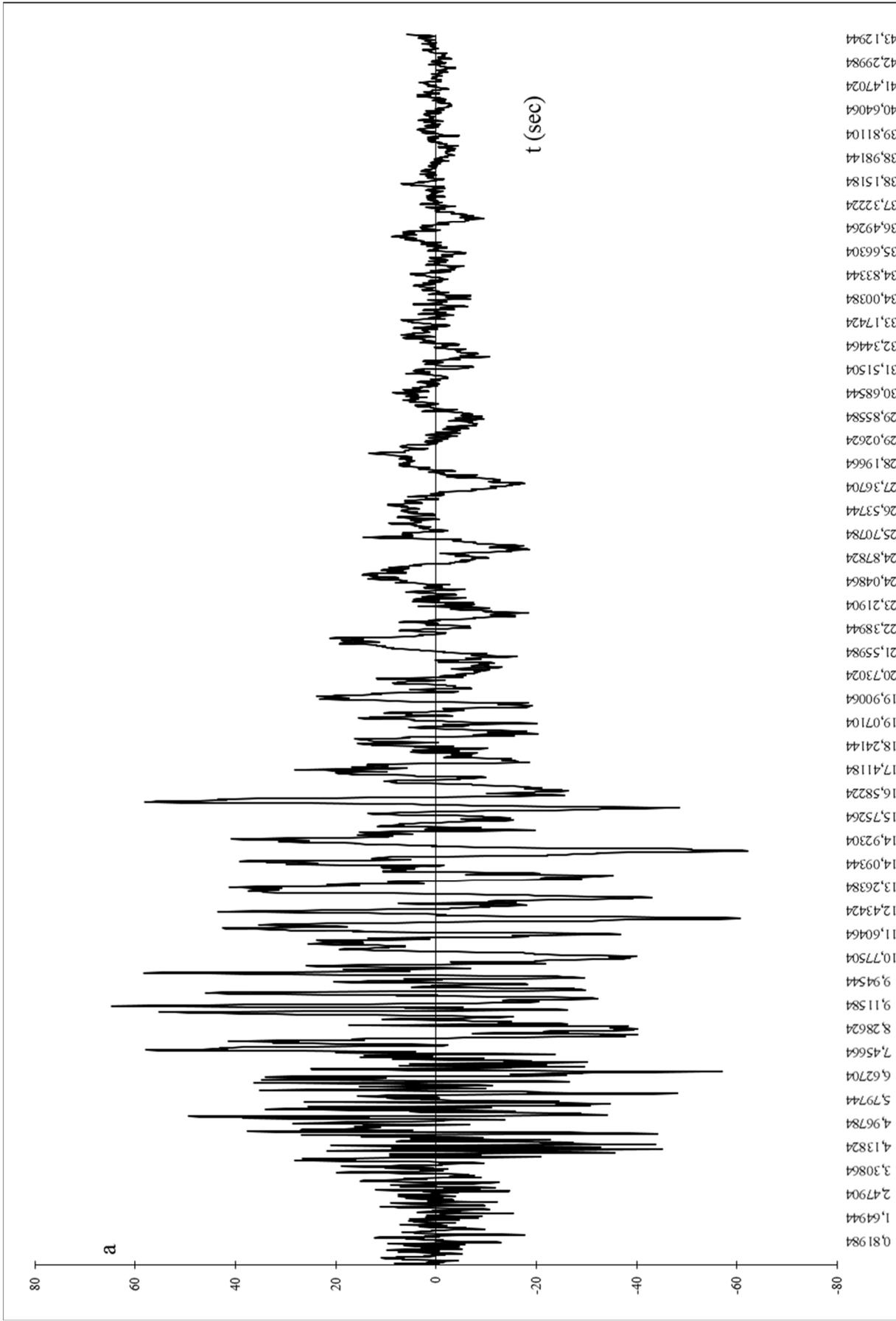


Figura 2.5 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Codroipo.  
 Comp. NS. 06/05/1976. h20:00:13

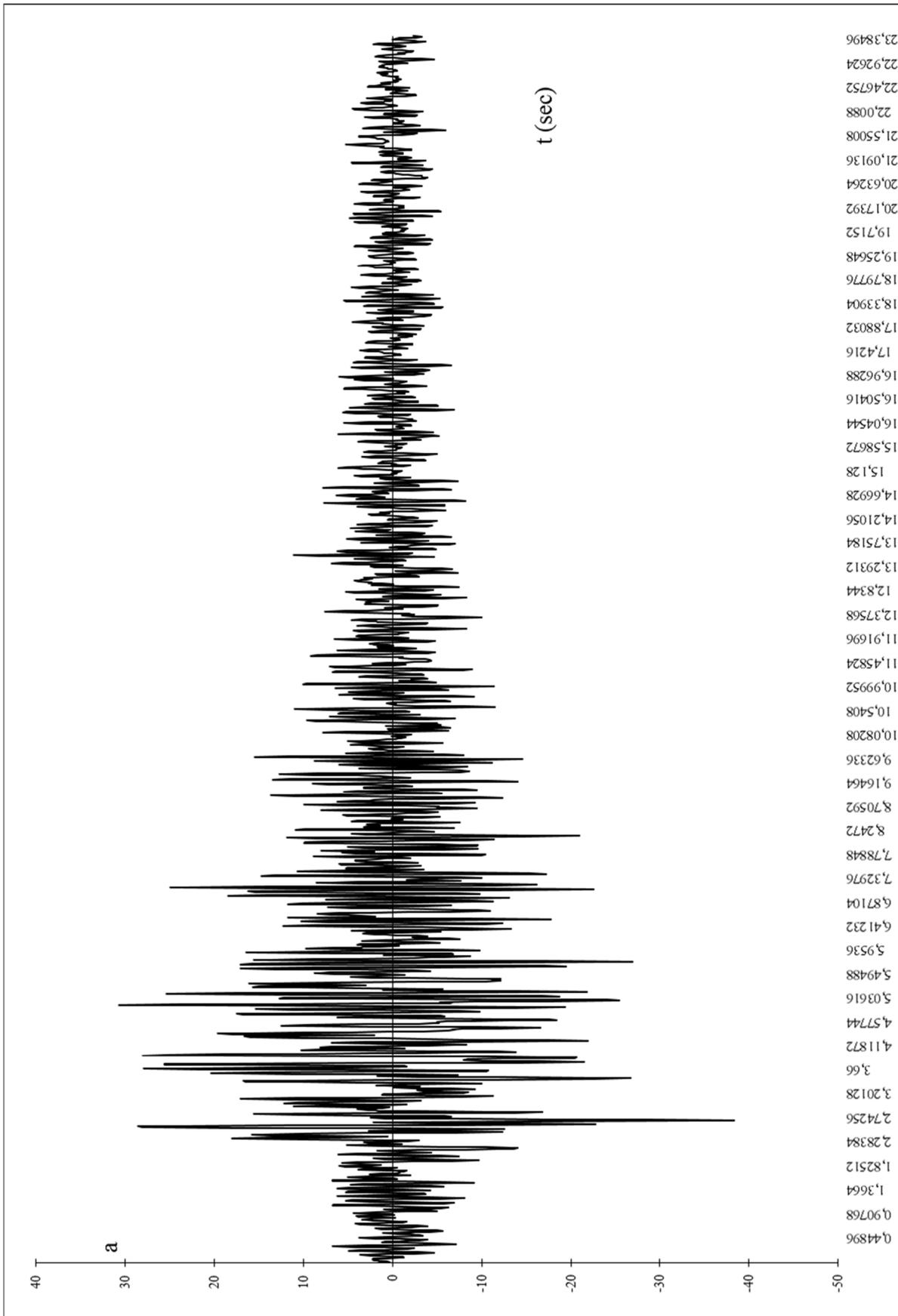


Figura 2.6 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Feltre.  
Comp. EW. 06/05/1976. h20:00:13

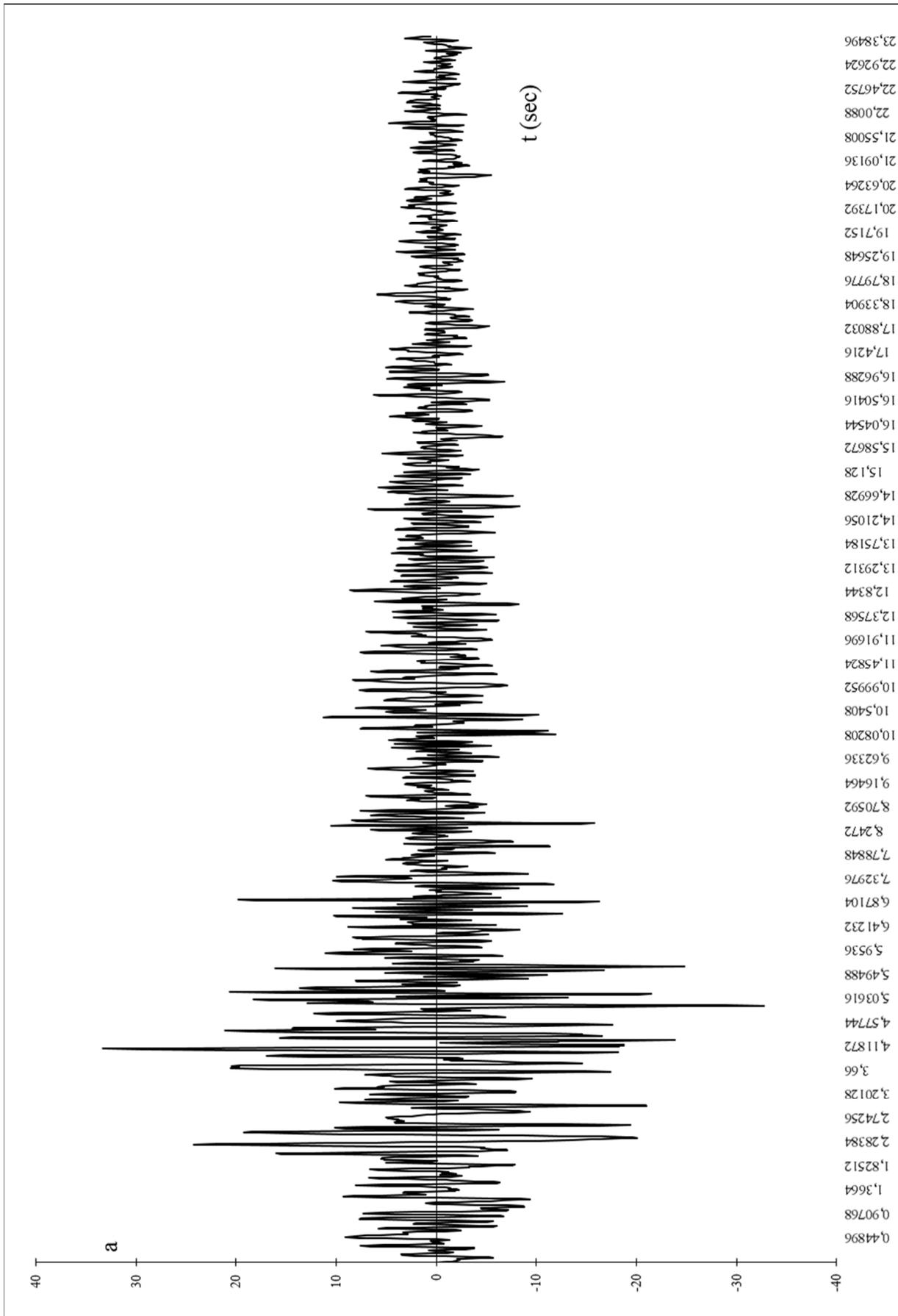


Figura 2.7 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>) . Registrazione di Feltre.  
 Comp. NS. 06/05/1976. h20:00:13

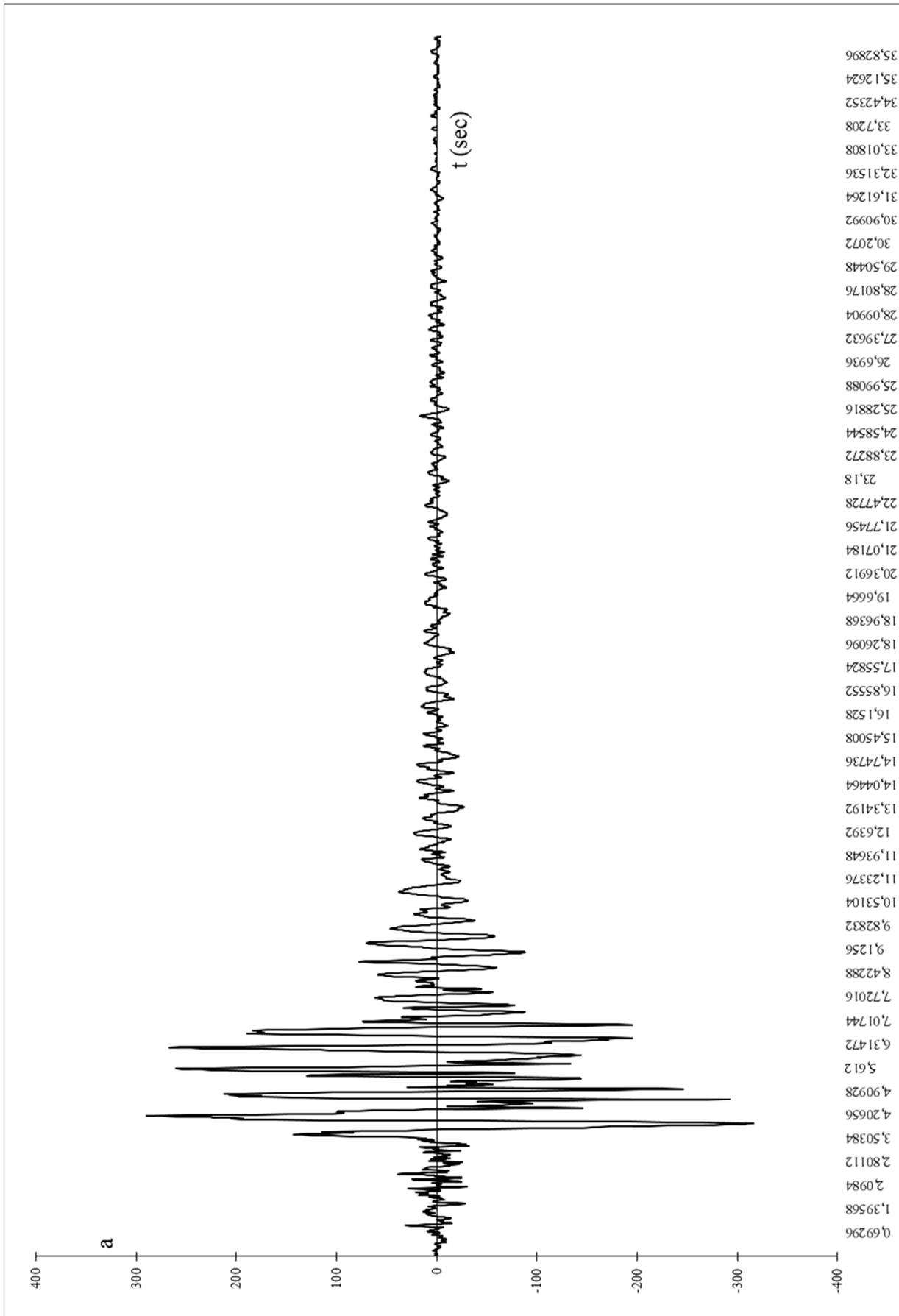


Figura 2.8 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Tolmezzo-Ambiesta.  
Comp. EW. 06/05/1976. h20:00:13

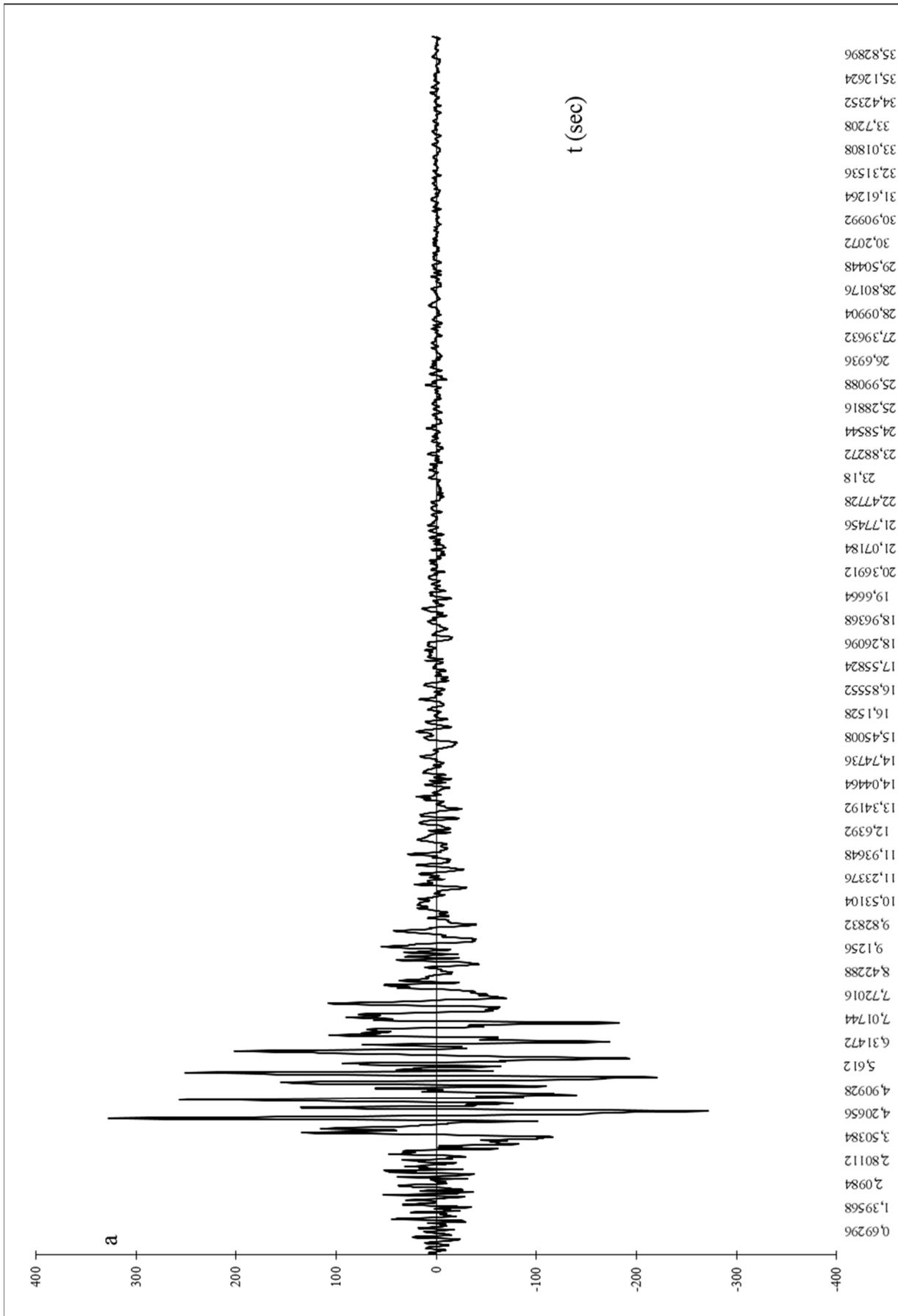


Figura 2.9 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>) . Registrazione di Tolmezzo-Ambiesta.  
 Comp. NS. 06/05/1976. h20:00:13

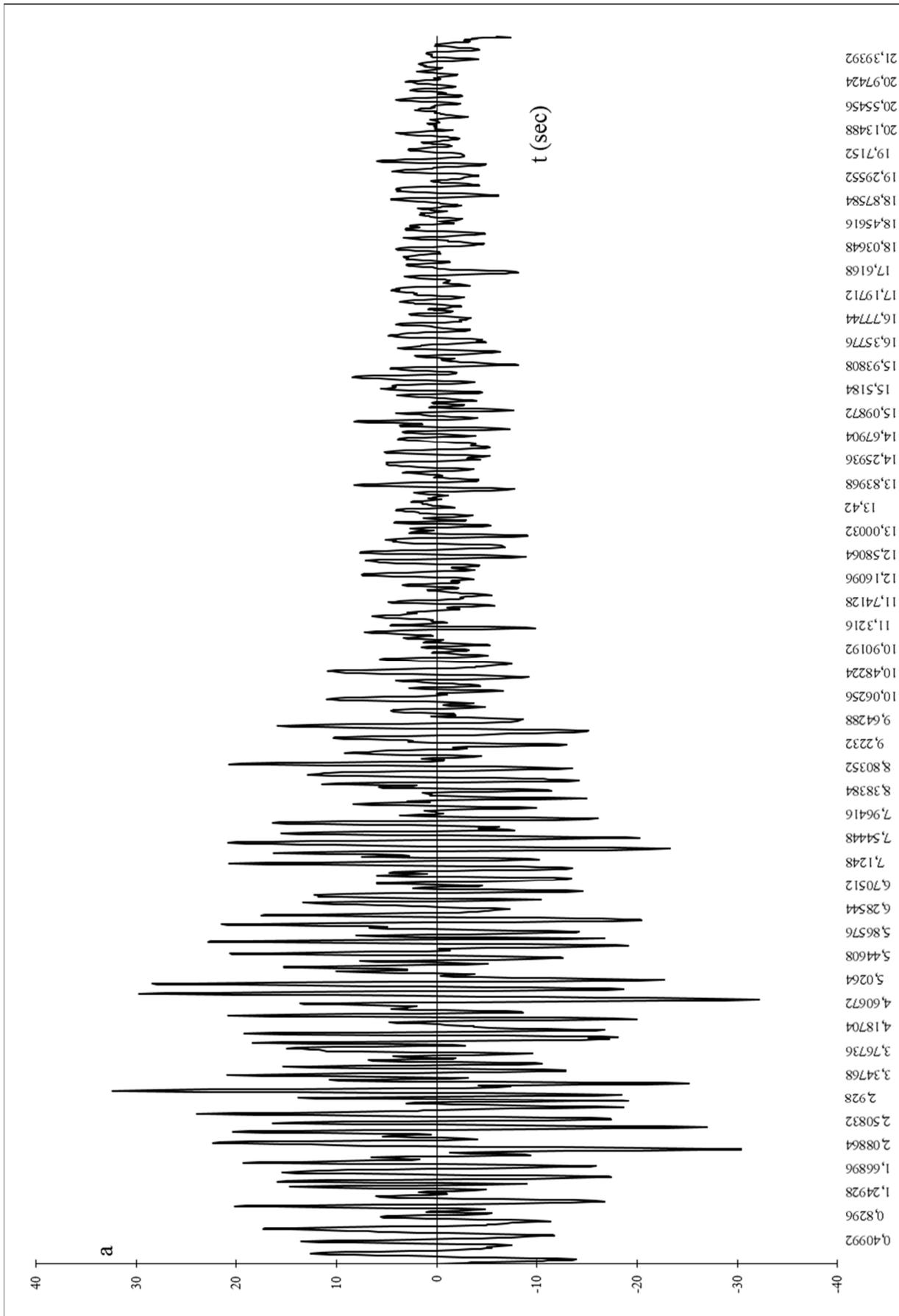


Figura 2.10 - Accelerazione ( $\text{cm/sec}^2$ ). Registrazione di Tregnago.  
Comp. EW. 06/05/1976. h20:00:13

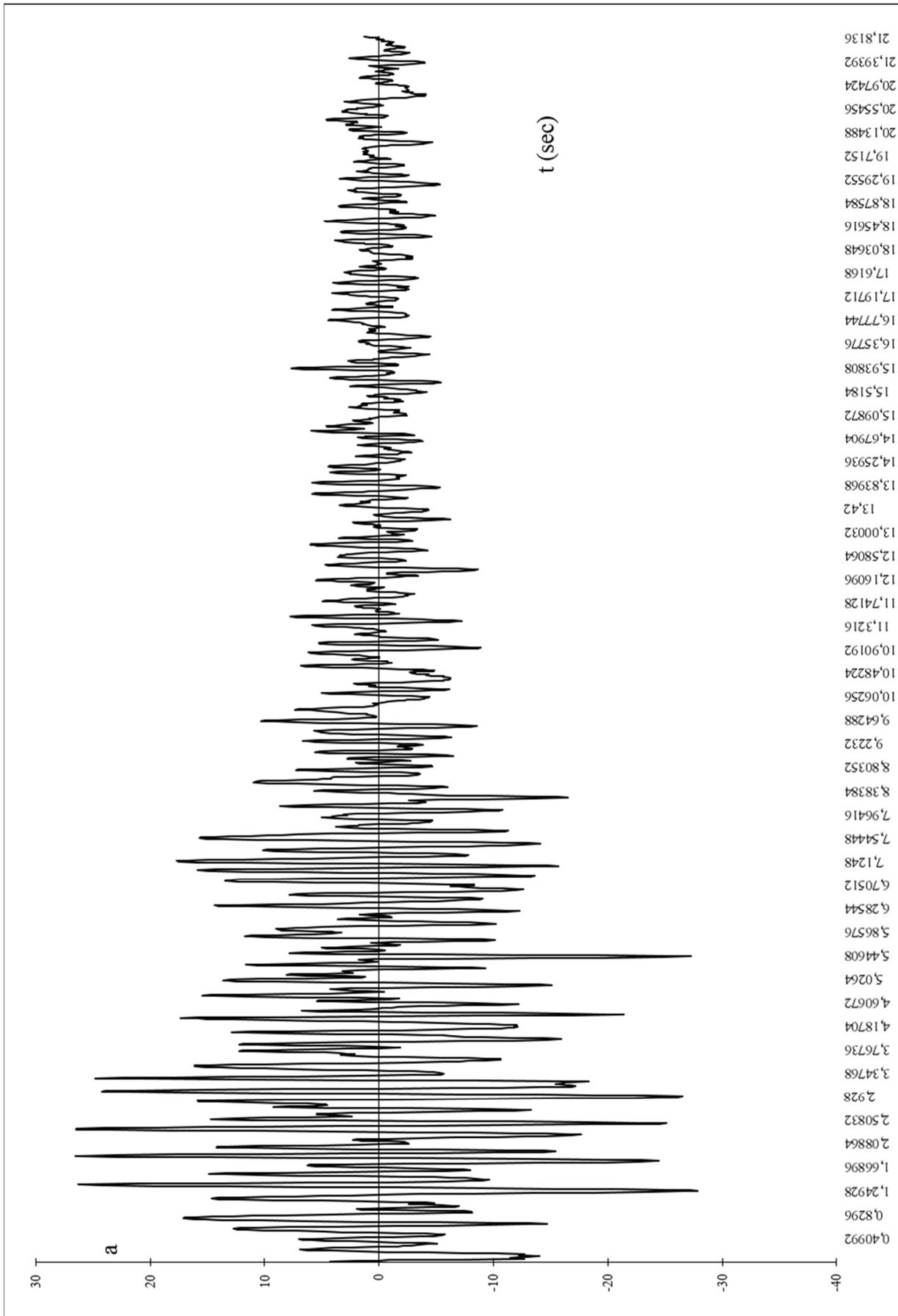


Figura 2.11 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>) . Registrazione di Tregnago  
 Comp. NS. 06/05/1976. h20:00:13

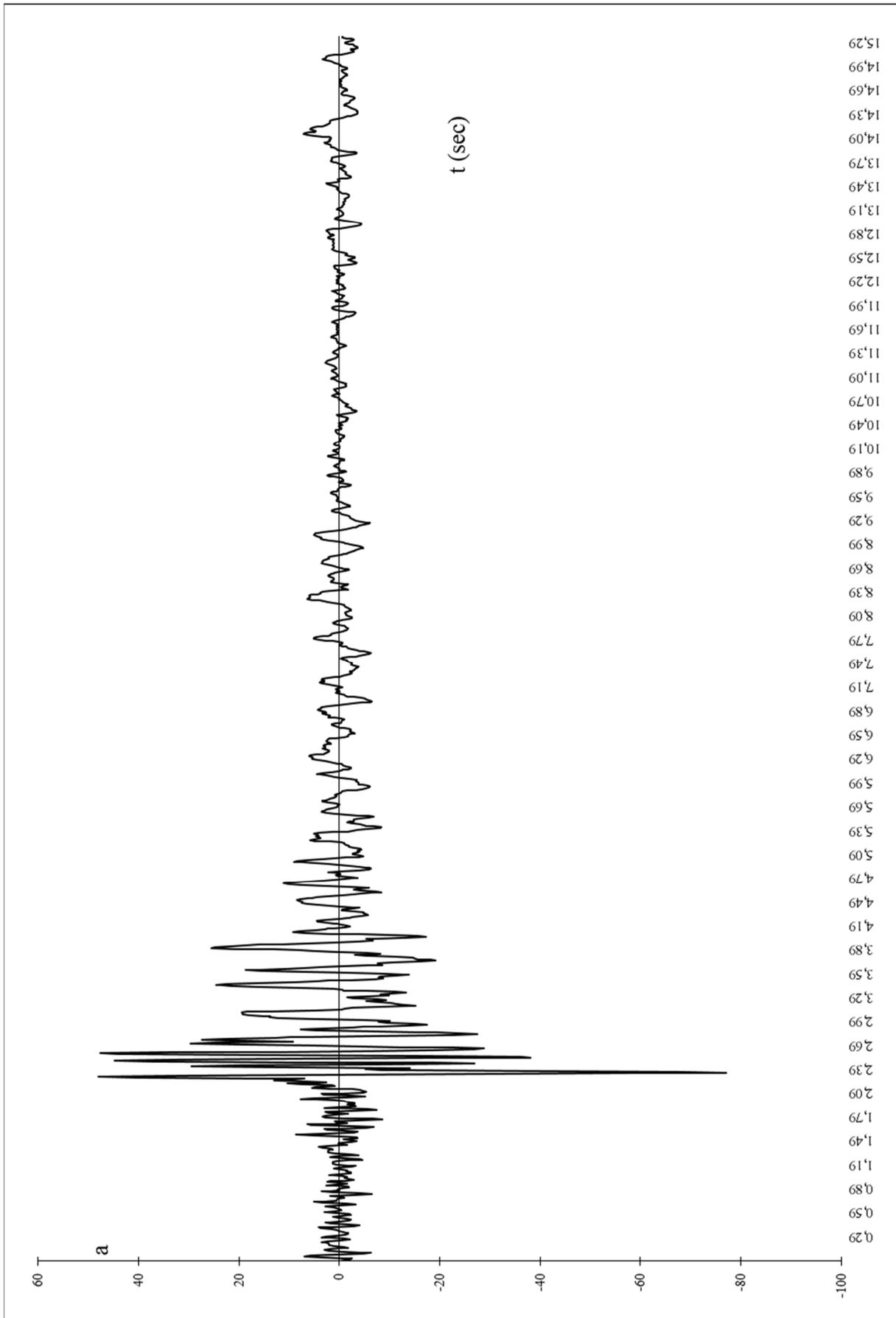


Figura 2.12 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Tolmezzo.  
Comp. EW. 07/05/1976. h00:23:50

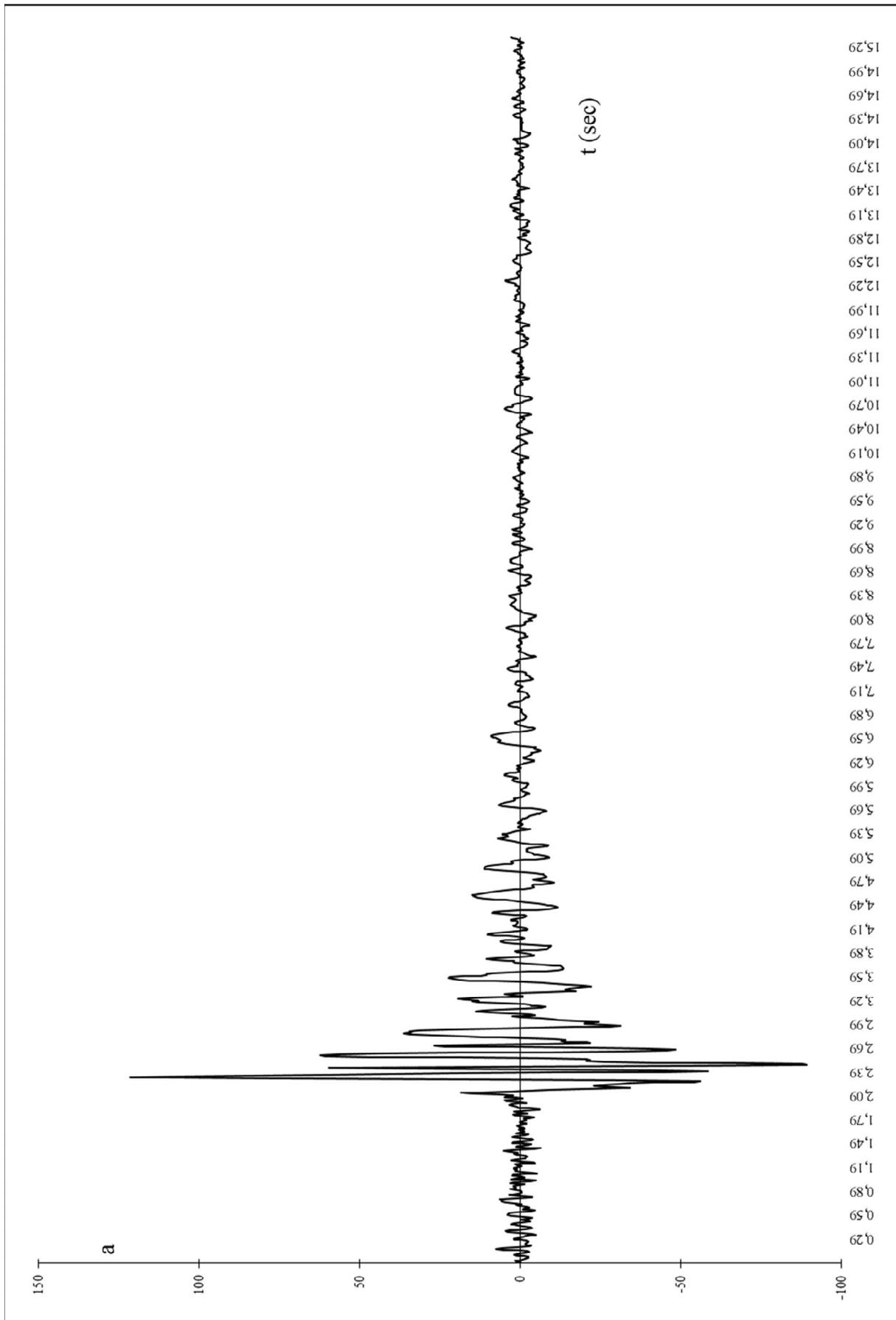


Figura 2.13 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Tolmezzo.  
 Comp. NS. 07/05/1976. h00:23:50

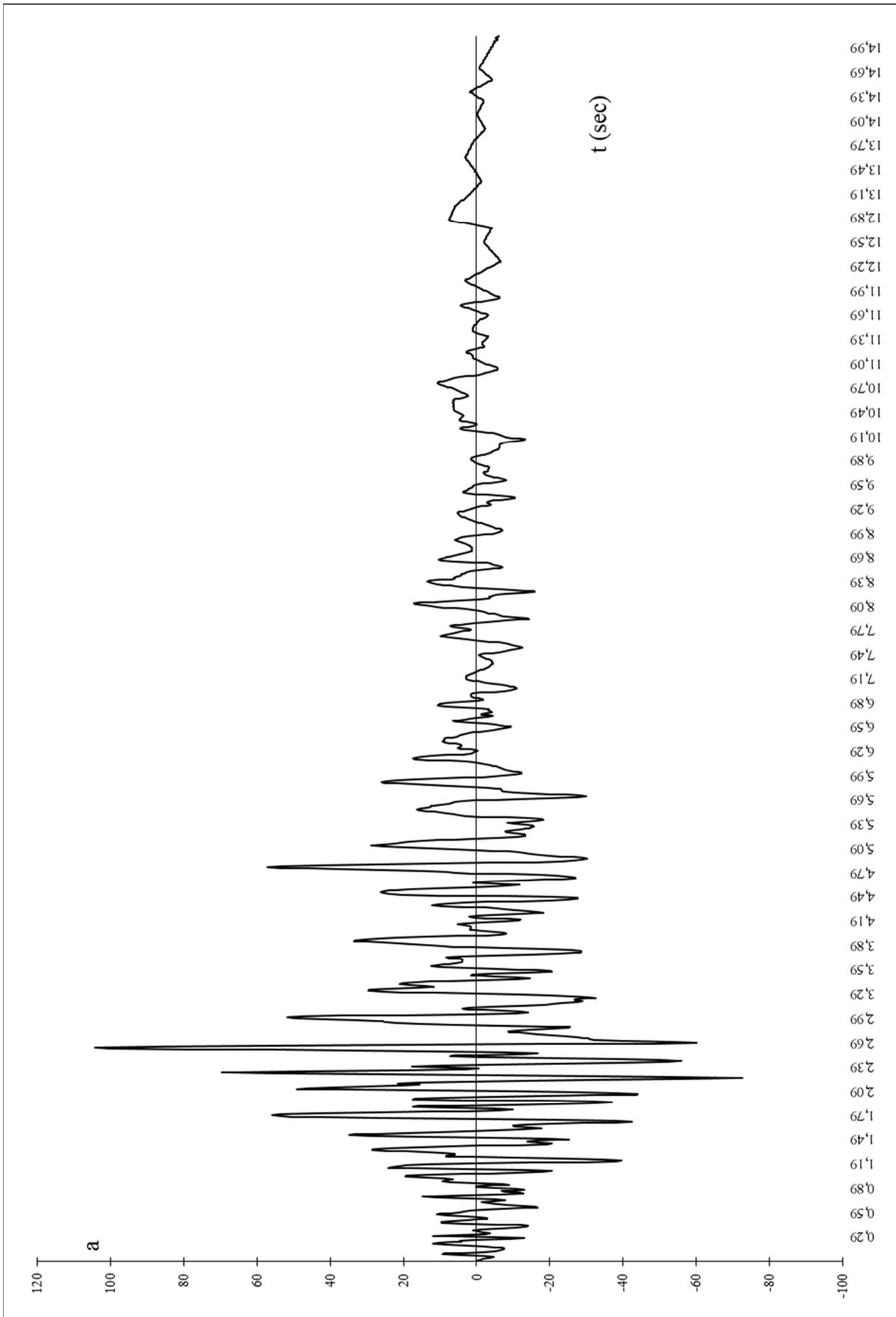


Figura 2.14 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Forgia-Cornino.  
Comp. EW. 11/09/1976. h16:31:12

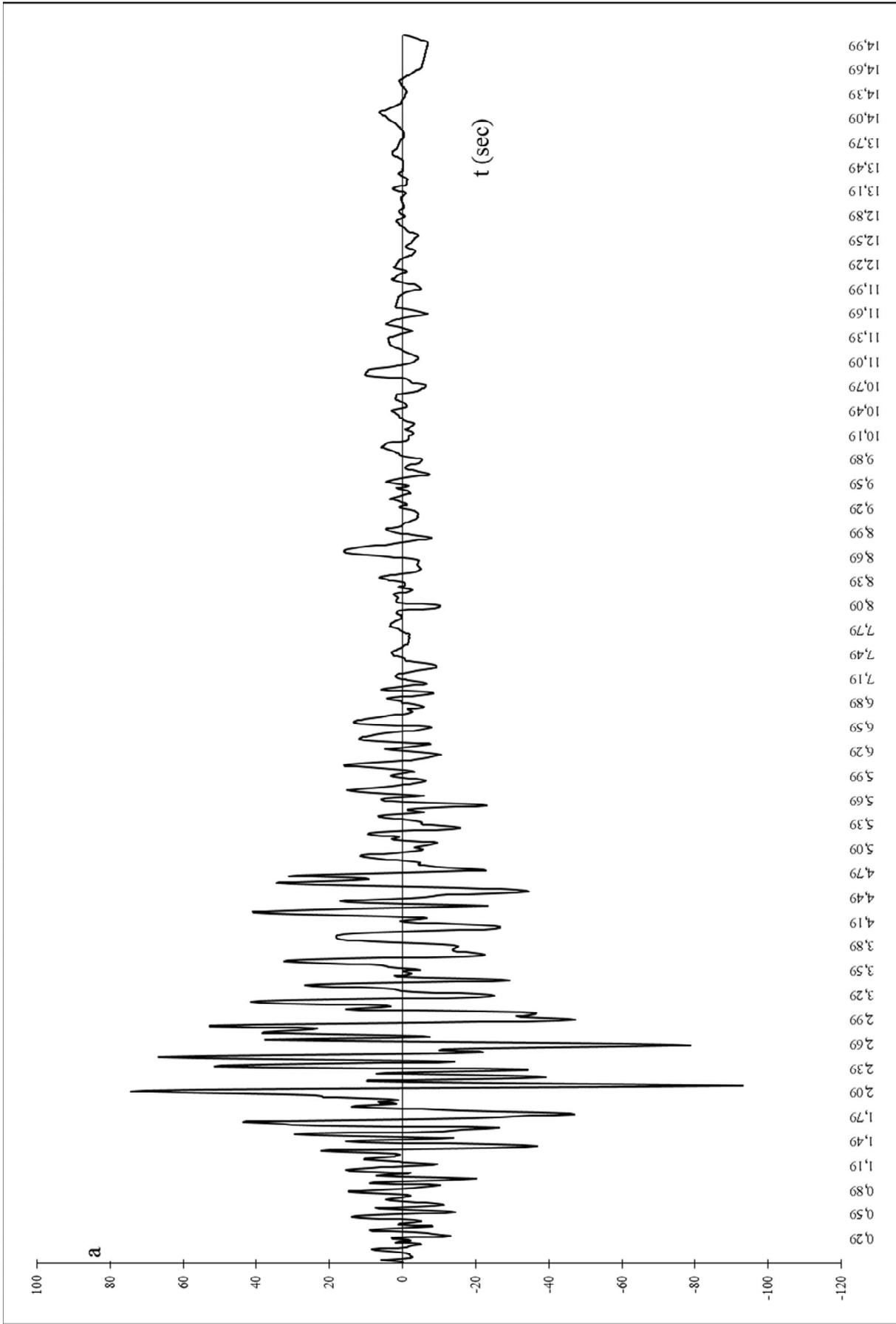


Figura 2.15 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Forgia-Cornino.  
 Comp. NS. 11/09/1976. h16:31:12

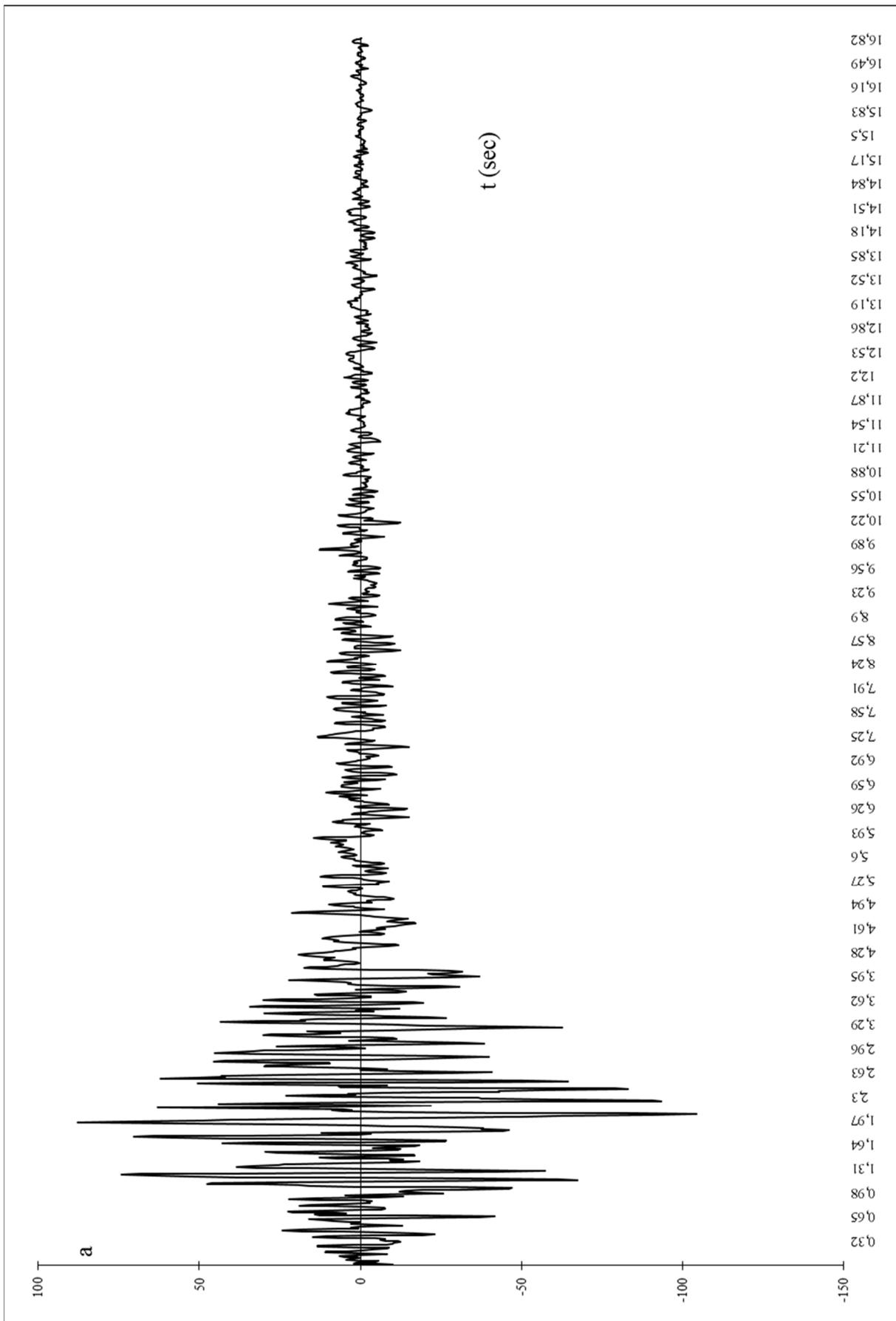


Figura 2.16 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Tarcento.  
 Comp. EW. 11/09/1976. h16:31:12

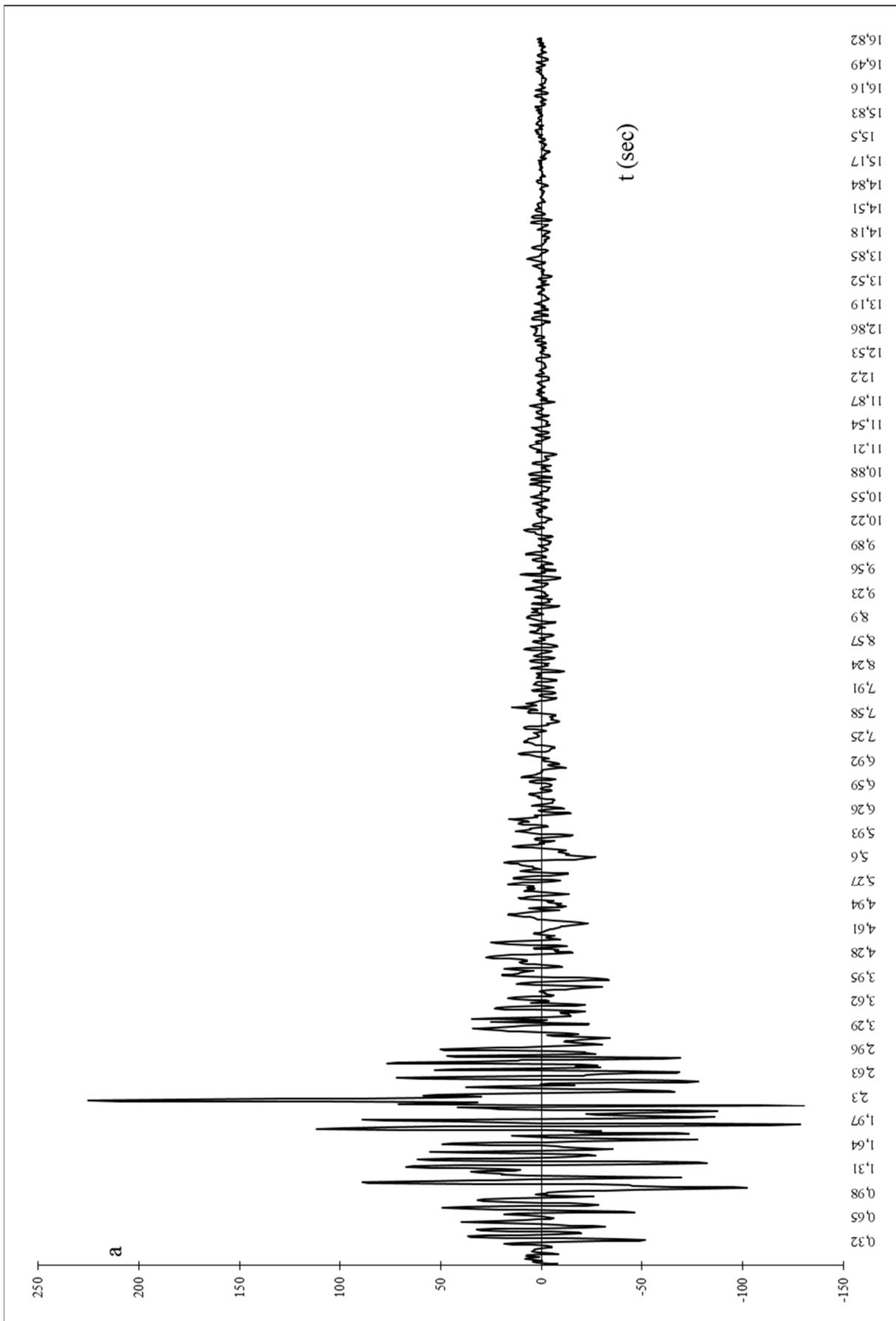


Figura 2.17 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>) . Registrazione di Tarcento.  
 Comp. NS. 11/09/1976. h16:31:12

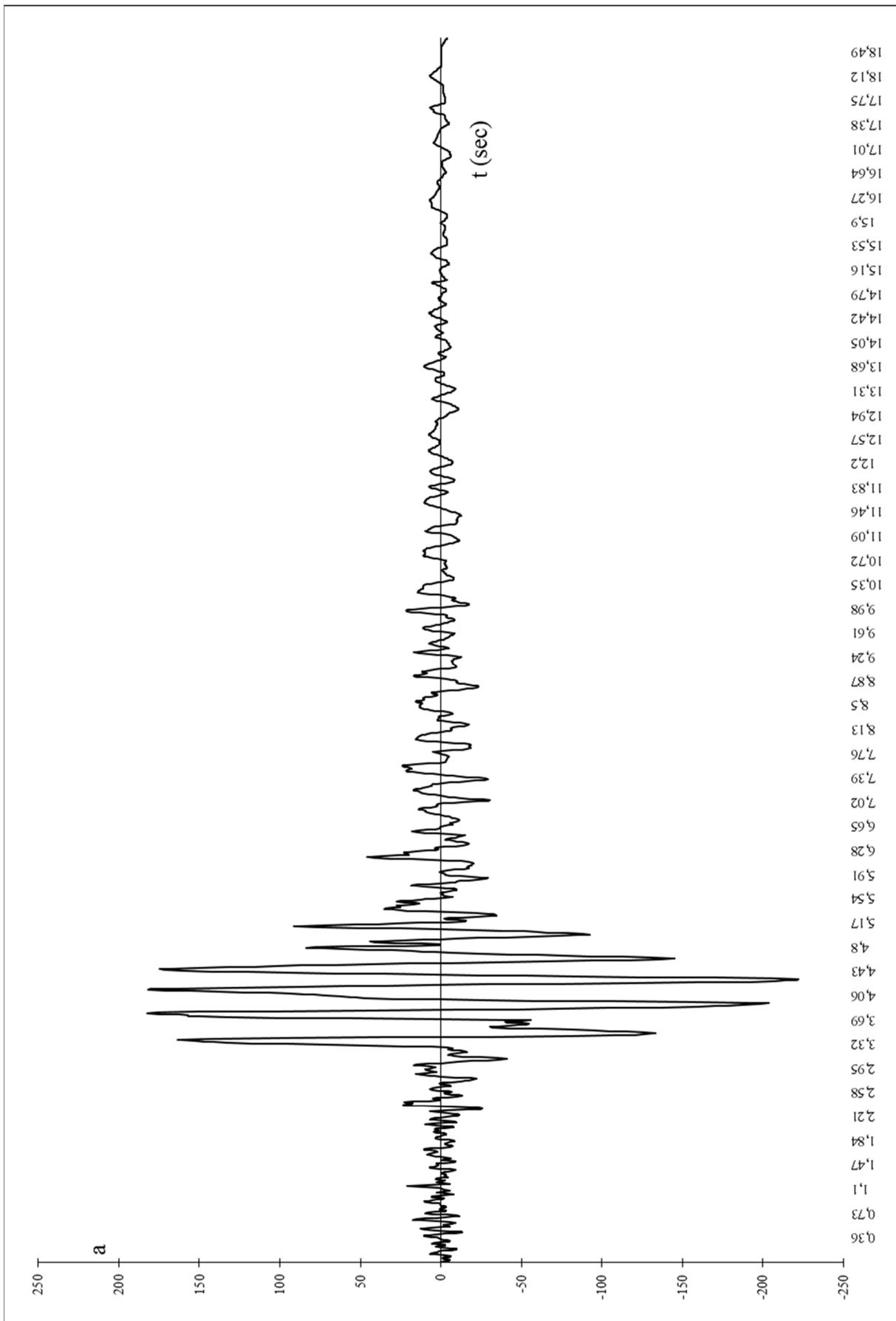


Figura 2.18 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Forgia-Cornino.  
 Comp. EW. 11/09/1976. h16:35:00

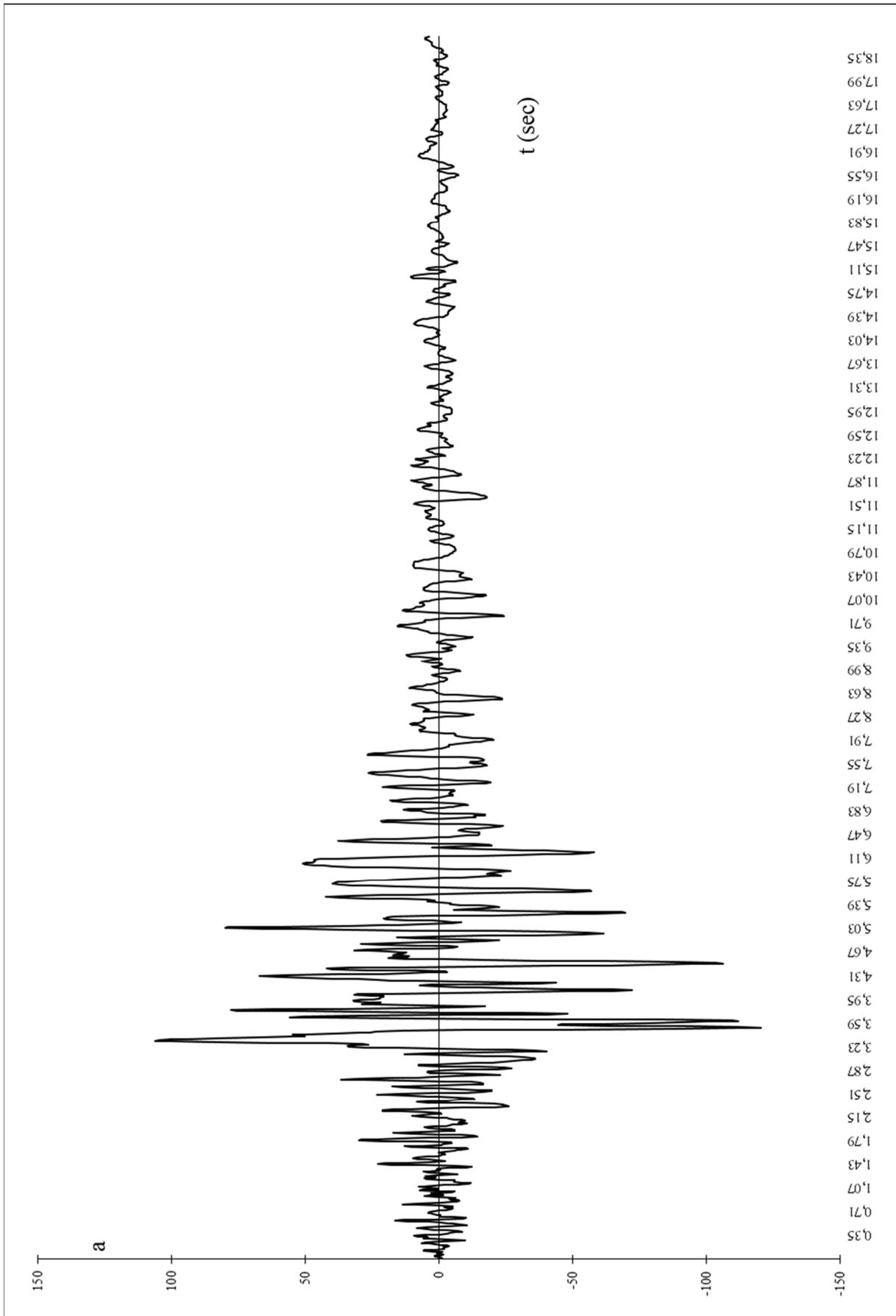


Figura 2.19 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Forgia-Cornino.  
Comp. NS. 11/09/1976. h16:35:00

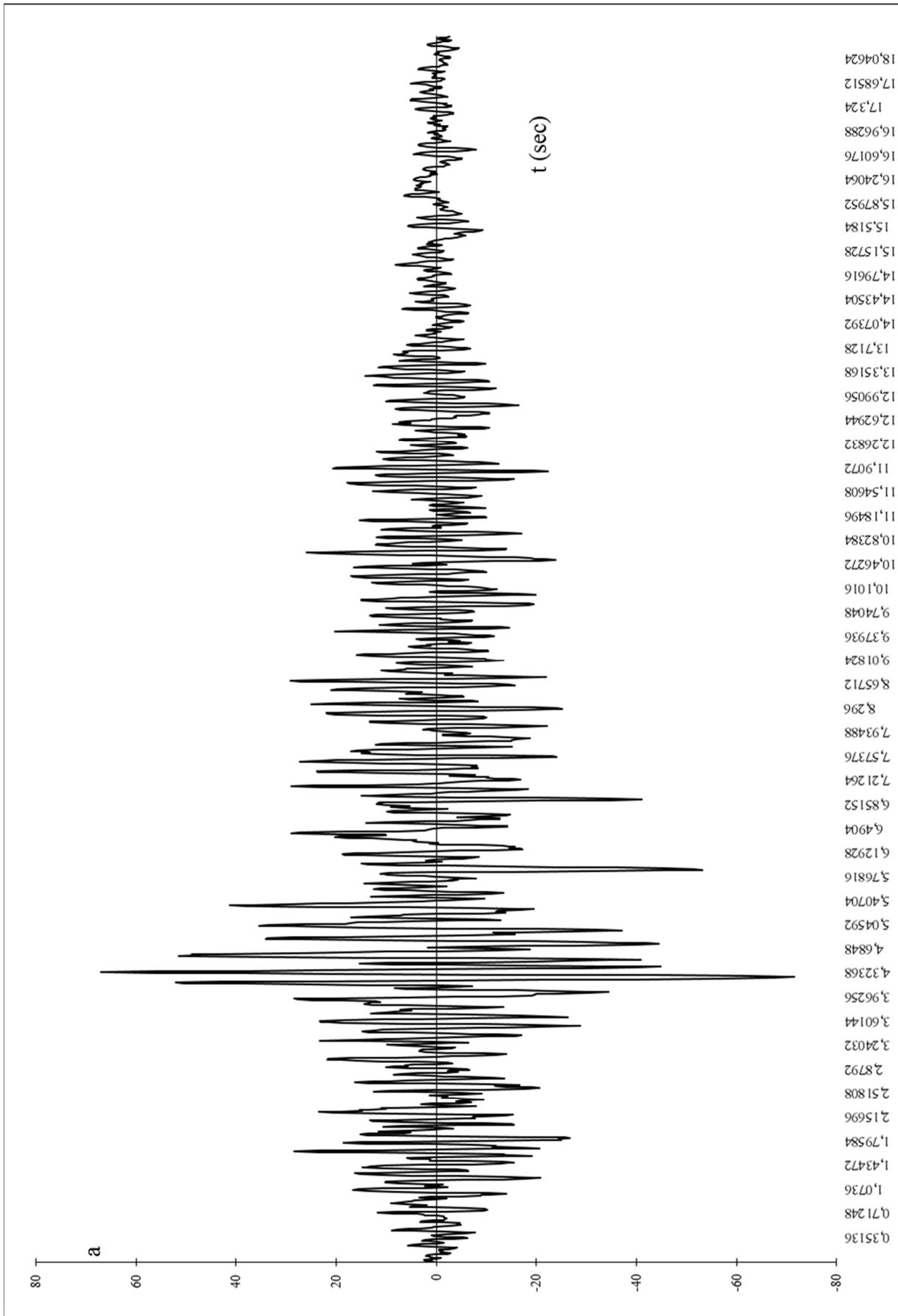


Figura 2.20 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di Milazzo.  
 Comp. EW. 15/04/1978. H23:33:47

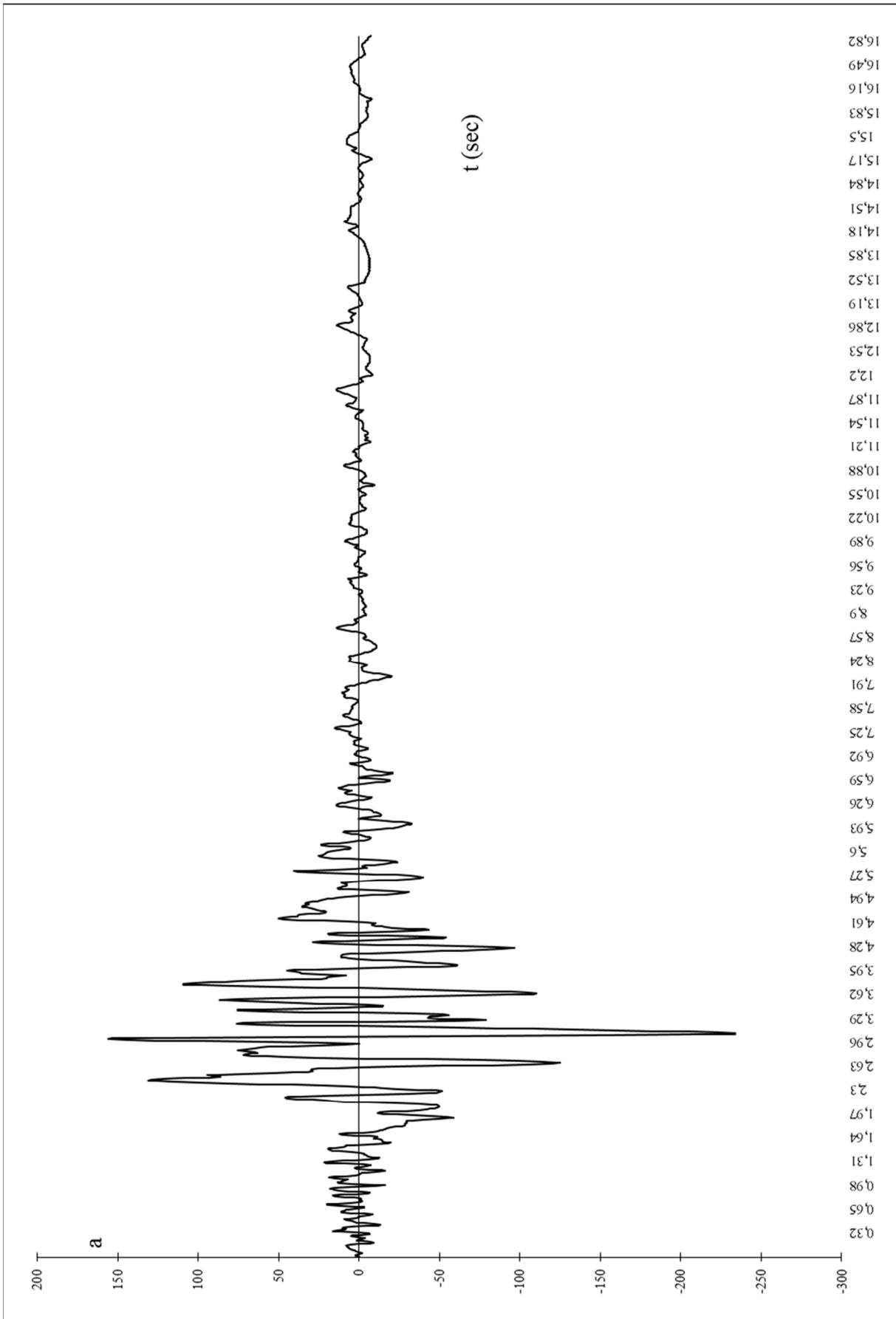


Figura 2.21 - Accelerazione (cm/sec<sup>2</sup>). Registrazione di S. Rocco.  
 Comp. EW. 15/09/1976. h09:21:18

### **3. I processi stocastici**

In molti casi di interesse ingegneristico è comune l'uso dei processi stocastici per modellare le azioni sulle costruzioni prodotte da un terremoto, dal vento, ecc., [31,39,43,44,45,50]. In queste circostanze la risposta strutturale sarà adeguatamente descritta solo in senso probabilistico, mediante la valutazione dei "cumulanti" o dei "momenti" di ogni ordine della risposta. Alcuni ben noti concetti di teoria della probabilità sono riportati per comodità in appendice A.

#### **3.1 Definizione di processo stocastico**

Una variabile aleatoria può essere utilizzata per modellare i fenomeni fisici aleatori per i quali gli esiti di esperimenti ripetuti sono numeri reali o possono essere associati a numeri reali. Molti altri fenomeni fisici aleatori sono caratterizzati, per contro, dal fatto che l'esito di un generico esperimento non è un numero, bensì

una funzione dipendente da un certo parametro (generalmente il tempo) o da più parametri (ad es., tempo e spazio). Ma, per un fissato valore di tali parametri, uno qualunque dei suddetti fenomeni può essere descritto, da un punto di vista probabilistico, da una variabile aleatoria. In questi casi il fenomeno fisico aleatorio viene modellato da un "processo stocastico", che a sua volta è definito come una variabile aleatoria dipendente da uno o più parametri. Ad es., supponiamo di aver effettuato  $n$  volte la registrazione di un certo processo nel tempo, e di aver ottenuto gli  $n$  eventi elementari, riportati in figura 3.1, formanti lo spazio  $S\{X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(k)}(t), \dots, X^{(n)}(t)\}$ . In tale figura si è indicato con  $X^{(k)}(t)$  il  $k$ -esimo esito dell'esperimento, il quale non è un numero reale ma una funzione del tempo. Questa famiglia di funzioni forma il processo stocastico:  $X(x; t)$ .

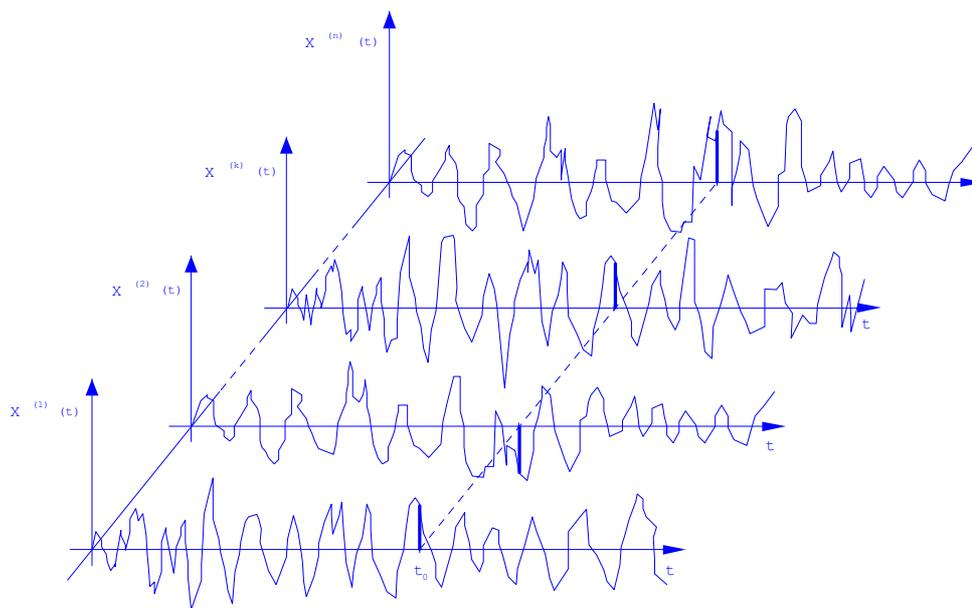


Figura 3.1 - Esempio di funzioni di un processo stocastico

Fissato un certo istante  $t_0$ , si possono estrarre dal processo tutte le registrazioni effettuate in tale istante, le quali sono generalmente diverse e quindi rappresentano una variabile aleatoria. Di tale v.a. possono essere determinati vari aspetti, quale la relativa F.D.P., oppure la funzione caratteristica od anche i momenti e i cumulanti; nota una di queste funzioni, per quanto richiamato in appendice, può essere definita completamente la variabile aleatoria in esame.

In generale dunque  $X(x;t)$  può avere quattro differenti significati:

1. Una famiglia di funzioni del tempo, ( $x$  e  $t$  variabili)
2. Una singola funzione del tempo, ( $t$  variabile,  $x=x_i$  fissato)
3. Una variabile aleatoria, ( $t=t_i$  fissato,  $x$  variabile)
4. Un singolo numero, ( $t$  e  $x$  fissati).

In un prefissato istante  $t_0$ , la descrizione probabilistica del processo aleatorio può dunque ottenersi mediante la conoscenza di una delle seguenti quantità:

- La funzione densità di probabilità

$$p_x(x;t) \tag{3.1}$$

tale che:  $P(x_1 \leq X(x, t_0) \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_x(x; t_0) dx$

- La funzione caratteristica, legata alla funzione densità di probabilità dalla trasformata di Fourier

$$M_x(\theta; t_0) = E[\exp(-i\theta X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\theta X) p_x(x; t_0) dx \tag{3.2}$$

- I momenti della v.a.  $X(x, t_0)$ , che nella notazione che segue è anche indicata con  $X(t_0)$ , legati alla funzione caratteristica dalla relazione

$$m_j[X] = E[X^j] = \frac{1}{(-i)^j} \left[ \frac{d^j M_x(\theta; t_0)}{d\theta^j} \right] \quad (3.3)$$

i quali, a meno del termine  $(-i)^j$  rappresentano anche i coefficienti dell'espansione in serie di McLaurin della funzione caratteristica e cioè

$$M_x(\theta; t_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} m_j[X] \theta^j \quad (3.4)$$

- I cumulanti della v.a.  $X(t_0)$  legati alla funzione caratteristica dalla relazione

$$k_j[X] = \frac{1}{(-i)^j} \left[ \frac{d^j M_x(\theta; t_0)}{d\theta^j} \right]_{\theta=0} \quad (3.5)$$

Tramite i cumulanti può essere introdotta una differente rappresentazione della funzione caratteristica e cioè

$$M_x(\theta; t_0) = \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} k_j[X] \theta^j \right) \quad (3.6)$$

Un processo aleatorio si definisce discreto o continuo, se esso rappresenta, rispettivamente, una famiglia di variabili aleatorie

discrete o continue. Inoltre, le caratteristiche di un processo aleatorio dipendono anche dal parametro  $t$  che, a sua volta, può essere discreto o continuo. Pertanto un processo aleatorio può essere classificato in una delle seguenti quattro categorie:

- processi aleatori continui con parametro continuo;
- processi aleatori continui con parametro discreto;
- processi aleatori discreti con parametro continuo;
- processi aleatori discreti con parametro discreto.

### **3.2. Processo aleatorio continuo con parametro discreto**

#### **3.2.1. Generalità**

Se il parametro  $t$  è discreto, ossia il processo aleatorio è noto in determinati istanti:  $t_1, t_2, \dots, t_s$ , allora può essere considerato come un insieme di variabili aleatorie:  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_s)$ , che simbolicamente indichiamo con  $X(t_j) = X_j$ . La completa descrizione probabilistica del processo stocastico  $X(t)$  può dunque ottenersi

dalla conoscenza della gerarchia di funzioni densità di probabilità congiunte

$$p_{x_1, x_2, \dots, x_r}(x_1, x_2, \dots, x_r; t_1, t_2, \dots, t_r) = p_{\bar{x}_r}(\bar{x}_r, \bar{t}_r) \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (3.7)$$

dove

$$\bar{X}_r^T = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_r] = [X(t_1) \ X(t_2) \ \dots \ X(t_r)] \quad (3.8)$$

$$\bar{x}_r^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r] \quad (3.9)$$

$$\bar{t}_r^T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_r] \quad (3.10)$$

Si osservi che, nota la funzione densità di probabilità congiunta  $p_{\bar{x}_{sr}}(\bar{x}_s, \bar{t}_s)$ , una qualunque funzione di densità di probabilità  $p_{\bar{x}_j}(\bar{x}_j, \bar{t}_j)$ , con  $j < s$ , non fornisce ulteriori informazioni sulla caratterizzazione del processo, in quanto quest'ultima può essere ottenuta dalla prima saturando delle opportune variabili  $x_i$  attraverso un'operazione di integrazione simile a quella definita nell'appendice con la relazione (A.60). Da ciò si deduce che il processo aleatorio  $X(t)$  è completamente definito dalla conoscenza della funzione densità di probabilità  $p_{\bar{x}_s}(\bar{x}_s, \bar{t}_s)$ , essendo  $s$  il numero di istanti considerati.

Oltre che attraverso la conoscenza delle funzioni densità di probabilità congiunte delle variabili aleatorie estratte dal processo, la caratterizzazione probabilistica di un processo aleatorio può essere ottenuta attraverso la conoscenza della funzione caratteristica multidimensionale

$$M_{\bar{x}_s}(\bar{\theta}_s; \bar{t}_s) = E[\exp(-i\bar{\theta}_s^T \bar{X}_s)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\bar{\theta}_s^T \bar{x}_s) p_{\bar{x}_s}(\bar{x}_s; \bar{t}_s) dx_1 dx_2 \dots dx_s \quad (3.11)$$

dove  $\theta_s$  è un vettore di s parametri reali

$$\theta_s^T = [\theta_1 \theta_2 \dots \theta_s] \quad (3.12)$$

Anche per le funzioni caratteristiche si può ripetere quanto detto per le funzioni densità di probabilità, con riferimento al fatto che la funzione caratteristica di ordine s (ossia di ordine massimo):  $M_{\bar{x}_s}(\bar{\theta}_s; \bar{t}_s)$ , contiene sicuramente le informazioni relative a tutte le funzioni caratteristiche  $M_{\bar{x}_j}(\bar{\theta}_j; \bar{t}_j)$  con  $j < s$ .

Analogamente a quanto detto per le variabili aleatorie multidimensionali, (appendice A), la funzione caratteristica può essere espressa in funzione dei momenti, attraverso la relazione

$$M_x(\bar{\theta}_s; \bar{t}_s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} m_j^T[\bar{X}_s] \bar{\theta}_s^{[j]} \quad (3.13)$$

dove  $m_j[\bar{X}_s]$  rappresenta il vettore di ordine  $s^j$  contenente tutti i momenti di ordine  $j$  della variabile multidimensionale

$\bar{X}_s^T = [X(t_1)X(t_2) \dots X(t_s)]$ , cioè

$$m_j[\bar{X}_s] = E[\bar{X}_s \otimes \bar{X}_s \otimes \dots \otimes \bar{X}_s] = E[\bar{X}_s^{[j]}] \quad (3.14)$$

il quale può essere a sua volta ottenuto dalla funzione caratteristica attraverso la relazione

$$m_j[\bar{X}_s] = \frac{1}{(-1)^j} \left[ \nabla_{\theta_s}^{[j]} M_{\bar{X}_s}(\bar{\theta}_s; \bar{t}_s) \right]_{\theta_s=0} \quad (3.15)$$

in cui  $\nabla_{\theta_s}$  è un operatore differenziale contenente le derivate parziali rispetto alle variabili  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ , e cioè:

$$\nabla_{\theta_s}^T = \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \dots \frac{\partial}{\partial \theta_s} \right]. \quad (3.16)$$

Una differente rappresentazione della funzione caratteristica può essere ottenuta mediante l'introduzione dei cumulanti, attraverso la relazione

$$M_{\bar{x}_s}(\bar{\theta}_s; \bar{t}_s) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} k_j^T[\bar{X}_s] \bar{\theta}_s^{[j]}\right) \quad (3.17)$$

dove  $k_j[\bar{X}_s]$  è il vettore di ordine  $s^j$  contenente tutti i cumulanti di ordine  $j$ , il quale può essere ottenuto dalla funzione caratteristica attraverso la relazione

$$k_j[\bar{X}_s] = \frac{1}{(-1)^j} \left[ \nabla_{\theta_s}^{[j]} \ln M_{\bar{x}_s}(\bar{\theta}_s; \bar{t}_s) \right]_{\theta_s=0} \quad (3.18)$$

### 3.2.2 Media a tempi multipli e correlazione di un processo stocastico

Due altre importanti quantità consentono di caratterizzare un processo stocastico e precisamente: la "media a tempi multipli" e la "correlazione del processo  $X(t)$ ".

Si definisce media a tempi multipli di ordine  $s$  del processo  $X(t)$ , e si indica con  $E_x^{(s)}(t_s)$ , la media del prodotto delle variabili aleatorie  $X(t_1) = X_1, X(t_2) = X_2, \dots, X(t_s) = X_s$  e cioè:

$$E_x^{(s)}(t_s) = E[X(t_1)X(t_2)\dots X(t_s)] \quad (3.19)$$

Tale media può essere ottenuta a partire dalla funzione caratteristica

$M_{\bar{x}_s}(\bar{\theta}_s; \bar{t}_s)$  attraverso la relazione

$$E_x^{(s)}(t_s) = \frac{1}{(-i)^s} \left[ \frac{\partial^s}{\partial \theta_1 \partial \theta_2 \dots \partial \theta_s} M_{\bar{x}_s}(\bar{\theta}_s; \bar{t}_s) \right]_{\theta_s=0} \quad (3.20)$$

E' importante notare che la media a tempi multipli è una funzione scalare delle variabili  $t_1 t_2 \dots t_s$ .

Si definisce correlazione di ordine  $s$  del processo  $X(t)$ , e si indica con  $R_x^{(s)}(\bar{t}_s)$ , la corrispondente funzione scalare in termini di cumulanti e cioè

$$R_x^{(s)}(\bar{t}_s) = k_s [X(t_1)X(t_2)\dots X(t_s)] \quad (3.2.15)$$

Questa correlazione può essere ottenuta a partire dalla funzione caratteristica  $M_{\bar{x}_s}(\bar{\theta}_s; \bar{t}_s)$  attraverso la relazione

$$R_x^{(s)}(\bar{t}_s) = \frac{1}{(-i)^s} \left[ \frac{\partial^s}{\partial \theta_1 \partial \theta_2 \dots \partial \theta_s} \ln M_{\bar{x}_s}(\bar{\theta}_s; \bar{t}_s) \right]_{\theta_s=0} \quad (3.22)$$

Dalla (3.20) e dalla (3.22) è possibile ottenere, inoltre, le relazioni che legano le medie a tempi multipli e le correlazioni; ad es., per  $s=1,2,3$  si ha

$$1) \quad E_x^{(1)}(t_1) = R_x^{(1)}(t_1) \quad (3.23a)$$

$$2) \quad E_x^{(2)}(t_1, t_2) = R_x^{(2)}(t_1, t_2) + R_x^{(1)}(t_1)R_x^{(1)}(t_2) \quad (3.23b)$$

$$3) \quad E_x^{(3)}(t_1, t_2, t_3) = R_x^{(3)}(t_1, t_2, t_3) + R_x^{(1)}(t_1)R_x^{(2)}(t_2, t_3) + R_x^{(1)}(t_2)R_x^{(2)}(t_1, t_3) + R_x^{(1)}(t_3)R_x^{(2)}(t_1, t_2) + R_x^{(1)}(t_1)R_x^{(1)}(t_2)R_x^{(1)}(t_3) \quad (3.23c)$$

Se le funzioni scalari  $E_x^{(s)}(\bar{t}_s)$  o  $R_x^{(s)}(\bar{t}_s)$  sono note per ogni insieme di variabili  $t_1, t_2, \dots, t_s$ , cioè se sono note come funzioni del vettore  $t_s$ , allora, attraverso un'opportuna scelta di tali variabili, è possibile ricostruire i vettori  $m_s[\bar{X}_s]$  o  $k_s[\bar{X}_s]$ . Ciò implica che la conoscenza delle medie a tempi multipli o delle correlazioni, intese come funzioni del vettore di variabili  $\bar{t}_s$ , consente di caratterizzare il

processo aleatorio fino all'ordine  $s$ . E' importante inoltre sottolineare che, attraverso le relazioni (3.23), scegliendo opportunamente le variabili  $t_i$ , è possibile risalire alle relazioni tra momenti e cumulanti di qualunque ordine di un processo.

### 3.3 Processi stocastici gaussiani

Un'importante classe di processi stocastici utilizzati nelle pratiche applicazioni sono i processi stocastici gaussiani, ossia quei processi per cui le variabili aleatorie  $X(t)$  per ogni  $t$  sono gaussiane. Per tali processi, tutte le correlazioni dal terzo ordine in poi sono nulle, quindi è sufficiente conoscere le correlazioni del 1° e del 2° ordine per descriverli probabilisticamente; cioè sono sufficienti due istanti per studiare il processo. In questo caso:

$$R_x^{(1)}(t_1) = E[X(t_1)] = \mu_x(t_1) \quad (3.24)$$

$$R_x^{(2)}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] - E[X(t_1)]E[X(t_2)] \quad (3.25)$$

Mentre tutte le correlazioni di ordine maggiore di due sono nulle, le medie a tempi multipli sono diverse da zero, ma sono deducibili in funzione di quelle del primo e del secondo ordine, attraverso relazioni che possono essere ottenute dalle equazioni (3.23) annullando le correlazioni dal terzo ordine in poi; per cui le medie

a tempi multipli di ordine superiore non forniscono alcuna ulteriore informazione sul processo che non sia già contenuta nelle prime due.

Il processo gaussiano può inoltre essere definito probabilisticamente dalla funzione caratteristica del secondo ordine relativa alle variabili gaussiane  $X(t_1)$ ,  $X(t_2)$ , la cui espressione, ricavabile dalla (3.17) per  $s=2$  è:

$$M_{\bar{x}_2}(\bar{\theta}_2; \bar{t}_2) = \exp\left(\sum_{j=1}^2 \frac{(-i)^j}{j!} k_j^T[\bar{X}_2] \bar{\theta}_2^{[j]}\right) = \exp\left(-ik_1^T[\bar{X}_2] \bar{\theta}_2 - \frac{1}{2} k_2^T[\bar{X}_2] \bar{\theta}_2^{[2]}\right) \quad (3.26)$$

dove  $k_1[\bar{X}_2]$  e  $k_2[\bar{X}_2]$  sono i vettori contenenti rispettivamente i cumulanti del primo e del secondo ordine della variabile multidimensionale  $\bar{X}_2^T = [X(t_1)X(t_2)]$ . L'antitrasformata di Fourier del secondo ordine della funzione caratteristica fornisce la funzione densità di probabilità nella forma

$$p_{\bar{x}_2}(\bar{x}_2; \bar{t}_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\text{Det}(\Sigma_{x_2})}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\bar{x}_2 - k_1[\bar{X}_2])^T \Sigma_{x_2}^{-1} (\bar{x}_2 - k_1[\bar{X}_2])\right\} \quad (3.27)$$

dove  $\Sigma_{x_2}$  è la cosiddetta matrice di correlazione fornita dalla

seguinte relazione:

$$\Sigma_{x_2} = \begin{pmatrix} R_x^{(2)}(t_1, t_1) & R_x^{(2)}(t_1, t_2) \\ R_x^{(2)}(t_2, t_1) & R_x^{(2)}(t_2, t_2) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

### 3.4 Processi stazionari

Un processo si dice "debolmente stazionario" se le sue funzioni di correlazione del primo e del secondo ordine risultano rispettivamente una costante ed una funzione della sola variabile

$$\tau = t_1 - t_2$$

$$\begin{cases} R_x^{(1)}(t) = \text{cost} = \mu_x \\ R_x^{(2)}(t_1, t_2) = R_x^{(2)}(t_1 - t_2) = R_x^{(2)}(\tau) \end{cases} \quad (3.29)$$

In tal caso la funzione di correlazione

$$R_x^{(2)}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] - E[X(t_1)]E[X(t_2)] \quad (3.30)$$

può scriversi nella forma

$$R_x^{(2)}(t_1, t_2) = E[X(t)X(t - \tau)] - \mu_x^2 \quad (3.4.2)$$

avendo posto  $t = t_1$  e  $\tau = t_1 - t_2$ .

Inoltre, si può verificare che la funzione di correlazione  $R_x^{(2)}(\tau)$  è una funzione pari, cioè vale la relazione

$$R_x^{(2)}(\tau) = R_x^{(2)}(-\tau) \quad (3.32)$$

ed assume il suo valore massimo in corrispondenza dell'ascissa  $\tau=0$ .

Per cui il valore massimo della funzione di correlazione viene raggiunto quando quest'ultima coincide con il cumulante del secondo ordine valutato ad un dato istante; infatti risulta

$$R_x^{(2)}(0) = k_2[X(t_1)] = k_2[X(t_2)] = \sigma_x^2 \quad (3.33)$$

In figura 3.4.1 è riportata la rappresentazione grafica della funzione di correlazione del secondo ordine di un processo aleatorio stazionario

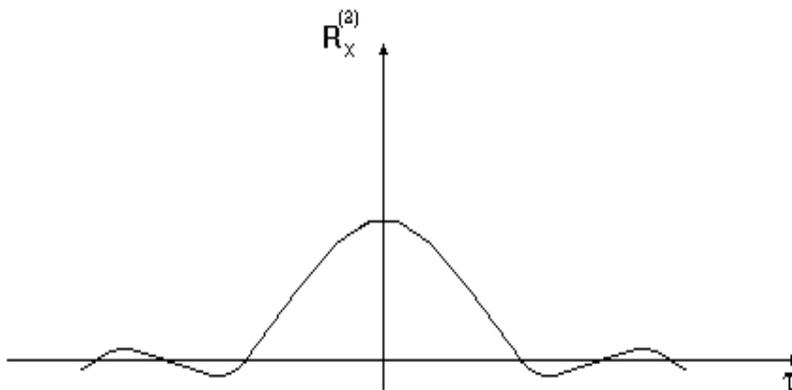


Figura 3.4.1 - Funzione di correlazione del secondo ordine in un processo aleatorio stazionario

Se il processo è tale che la 3.29b è verificata fino all'ordine  $r$ , per qualunque  $j \leq r$ , esso si dice "stazionario fino all'ordine  $r$ "; ad es. si dice stazionario fino al terzo ordine se oltre alle 3.29

$$\text{si ha } R_x^{(3)}(t_1, t_2, t_3) = R_x^{(3)}(t_1 - t_2, t_1 - t_3) = R_x^{(3)}(\tau_1, \tau_2) \quad (3.34)$$

Se poi tale proprietà è verificata per ogni ordine della correlazione, ossia

$$\forall j \leq r \rightarrow R_x^{(j)}(t_1, t_2, \dots, t_j) = R_x^{(j)}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}) = R_x^{(j)}(\bar{\tau}_{j-1}) \quad (3.35)$$

il processo si dice "fortemente stazionario". Ovviamente la "forte" stazionarietà implica la debole stazionarietà, ma non viceversa.

Nel caso particolare di processo stazionario gaussiano, osserviamo che le medie a tempi multipli di ordine superiore al secondo possono essere ottenute in funzione di quelle del primo e del secondo ordine e che le correlazioni di ordine maggiore del secondo sono tutte nulle, pertanto non ha senso la distinzione tra debole e forte stazionarietà, in quanto la prima implica la seconda. Un processo stazionario gaussiano è quindi caratterizzato dalla

conoscenza della media, che è costante, e della correlazione del secondo ordine, che è una funzione di una sola variabile.

### 3.5 Densità spettrale di potenza

Dato un processo  $X(t)$  stazionario fino all'ordine  $r$ , si definisce "densità spettrale di potenza", (PSD: Power Spectral Density), di ordine  $j \leq r$ , e si indica con  $S_x^{(j)}(\bar{\omega}_j)$ , la trasformata  $(j-1)$ -upla di Fourier della funzione di correlazione di ordine  $j$ ; vale cioè la relazione:

$$S_x^{(j)}(\bar{\omega}_j) = \int_{-\infty \dots j-1 \text{ volte}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\bar{\omega}^T \bar{\tau}_{j-1}) R_x^{(j)}(\bar{\tau}_{j-1}) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{j-1} \quad (3.36)$$

essendo  $\bar{\omega}$  un vettore costituito da  $j-1$  parametri reali:  $\bar{\omega}^T = [\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{j-1}]$ . E' ovvio che vale anche la relazione inversa che lega la funzione di correlazione alla densità spettrale di potenza, attraverso l'antitrasformata  $(j-1)$ -upla di Fourier

$$R_x^{(j)}(\bar{\tau}_{j-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{j-1}} \int_{-\infty \dots j-1 \text{ volte}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\bar{\omega}^T \bar{\tau}_{j-1}) S_x^{(j)}(\bar{\omega}) d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_{j-1} \quad (3.37)$$

Le relazioni (3.36) e (3.37) sono importantissime nell'ambito della dinamica aleatoria poiché consentono il passaggio dall'analisi di un processo aleatorio stazionario nel dominio dei tempi ( $\tau_j$ ), all'analisi dello stesso processo nel dominio delle pulsazioni angolari ( $\omega_j$ ) e viceversa. Nel caso particolare di processo stazionario gaussiano, esse prendono il nome di "relazioni di Wiener-Khintchine" e risultano:

$$S_x^{(2)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega\tau) R_x^{(2)}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega\tau) R_x^{(2)}(\tau) d\tau \quad (3.38)$$

$$R_x^{(2)}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega\tau) S_x^{(2)}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -\cos(\omega\tau) S_x^{(2)}(\omega) d\omega \quad (3.39)$$

Tenuto conto del fatto che il cumulante del secondo ordine di X non è altro che la funzione di correlazione valutata per  $\tau=0$ , esso può essere espresso in funzione della densità spettrale di potenza del secondo ordine dalla relazione

$$k_2[X] = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x^{(2)}(\omega) d\omega \quad (3.40)$$

### 3.6 Processi delta-correlati

Una delle classi più importanti di processi stocastici è rappresentata dalla classe dei processi delta-correlati  $W(t)$ ,

caratterizzati dalle seguenti funzioni di correlazione

$$\begin{cases} R_w^{(1)}(t_1) = q^{(1)}(t_1) \\ R_w^{(2)}(t_1, t_2) = q^{(2)}(t_1)\delta(t_1 - t_2) \\ \vdots \\ R_w^{(s)}(t_1, t_2, \dots, t_s) = q^{(s)}(t_1)\delta(t_1 - t_2)\delta(t_1 - t_3) \dots \delta(t_1 - t_s) \quad s = 2, 3, \dots, \infty \end{cases} \quad (3.41)$$

dove  $q^{(s)}(t_1)$  è un coefficiente che rappresenta l'intensità di ordine  $s$  del processo, e  $\delta(\cdot)$  è la funzione delta di Dirac.

Se nelle (3.6.1) le intensità  $q^{(1)}(t_1), q^{(2)}(t_1), \dots, q^{(s)}(t_1)$  del processo delta-correlato sono indipendenti dalla variabile  $t_1$  (ossia sono delle costanti), è facile verificare che il processo è stazionario fino all'ordine  $s$ . Se tale circostanza si verifica per qualunque  $s$ , allora il processo è fortemente stazionario.

### 3.7 Processo di Poisson bianco

Un esempio di processo delta-correlato è il processo di Poisson bianco (Poisson white noise process) definito da

$$W(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \delta(t - t_k) \quad (3.42)$$

Questa funzione è una serie di impulsi delta di Dirac  $\delta(t-t_k)$ .  $N(t)$  è il cosiddetto "processo di conta", il quale fornisce il numero di impulsi che si verificano nell'intervallo di tempo  $[0,t]$ .  $Y_k$  è una variabile aleatoria indipendente dagli istanti  $t_k$ .

Indicato con  $\lambda(t)$  il numero medio di impulsi che si hanno nell'intervallo infinitesimo  $[t, t+dt]$ ,

$$E[N(dt)] = \lambda(t)dt + O(dt) \quad (3.43)$$

la relativa funzione di correlazione è data dall'espressione:

$$R_w^{(s)}(t_1, t_2, \dots, t_s) = \lambda(t) E[Y_k^s] \delta(t_1 - t_2) \delta(t_1 - t_3) \dots \delta(t_1 - t_s) \quad (3.44)$$

dalla quale si deduce che il processo di Poisson bianco è un particolare processo delta-correlato in cui le intensità  $q^{(s)}(t_1)$  di

vario ordine sono legate alle caratteristiche statistiche delle variabili  $Y_k$  e del processo di Poisson  $N(t)$ ; cioè si ha

$$q^{(s)}(t_1) = \lambda(t)E[Y_k^s] \quad (3.45)$$

### 3.8. Processo di Poisson composto

Il processo di Poisson bianco  $W(t)$  può essere considerato come la derivata formale del cosiddetto processo di Poisson composto, (CPP: Compound Poisson Process)  $C(t)$  definito da

$$C(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k U(t - t_k) \quad (3.46)$$

dove  $U(t)$  è la funzione ad intervallo unitario. In questo caso le relative funzioni di correlazione risultano

$$R_c^{(1)}(t) = \lambda(t)E[Y_k] \quad (3.47)$$

$$R_c^{(s)}(t_1, t_2, \dots, t_s) = \lambda(t)E[Y_k^s] \min(t_1, t_2, \dots, t_s) \quad \forall s \geq 2 \quad (3.48)$$

Differenziando quest'ultima rispetto  $t_1, t_2, \dots, t_s$ , si ottiene

$$\frac{\partial^s R_c^s(t_1, t_2, \dots, t_s)}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_s} = R_w^{(s)}(t_1, t_2, \dots, t_s) \quad (3.49)$$

la quale mostra che la funzione di correlazione di ordine  $s$  del processo di Poisson bianco coincide con la derivata  $s$ -esima della funzione di correlazione del corrispondente processo di Poisson composto.

Consideriamo adesso l'incremento del processo CPP

$$dC(t_j) = C(t_j + dt) - C(t_j) \quad (3.50)$$

le relative funzioni di correlazione risultano

$$\begin{cases} R_{dc}^{(1)}(t_1) = \lambda E[Y] dt \\ R_{dc}^{(2)}(t_1, t_2) = \lambda E[Y^2] \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \\ \cdot \\ R_{dc}^{(s)}(t_1, t_2, \dots, t_s) = \lambda E[Y^s] \delta(t_1 - t_2) \delta(t_1 - t_3) \dots \delta(t_1 - t_s) dt_1 dt_2 \dots dt_s \end{cases} \quad (3.51)$$

dalle quali tenendo conto delle relazioni (3.23) tra le medie a tempi multipli e le correlazioni, è possibile ottenere le importanti relazioni

$$\begin{aligned}
E[dC(t_1)] &= \lambda E[Y]dt \\
E[dC(t_1)dC(t_2)] &= \lambda E[Y^2]\delta(t_1 - t_2)dt_1dt_2 + \lambda^2 E[Y]^2 dt_1dt_2 \\
E[dC(t_1)dC(t_2)dC(t_3)] &= \lambda E[Y^3]\delta(t_1 - t_2)\delta(t_1 - t_3)dt_1dt_2dt_3 + \\
&\quad + \lambda^2 E[Y]E[Y^2][\delta(t_1 - t_2) + \delta(t_1 - t_3) + \delta(t_3 - t_2)]dt_1dt_2dt_3 + \\
&\quad + \lambda^3 E[Y^3]dt_1dt_2dt_3 \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Inoltre, essendo:

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t} \delta(t_1 - t_2)dt_1t_2 = \underbrace{\delta(0)dt}_{=1} dt = dt \tag{3.53}$$

si ha ancora la relazione

$$E[dC(t)^r] = k_r[dC(t)] \tag{3.54}$$

la quale mostra che cumulanti e momenti dello stesso ordine dell'incremento di un processo di Poisson composto sono coincidenti.

In figura 3.8.1 sono riportati ad esempio un processo di Poisson composto e il suo corrispondente processo di Poisson bianco.

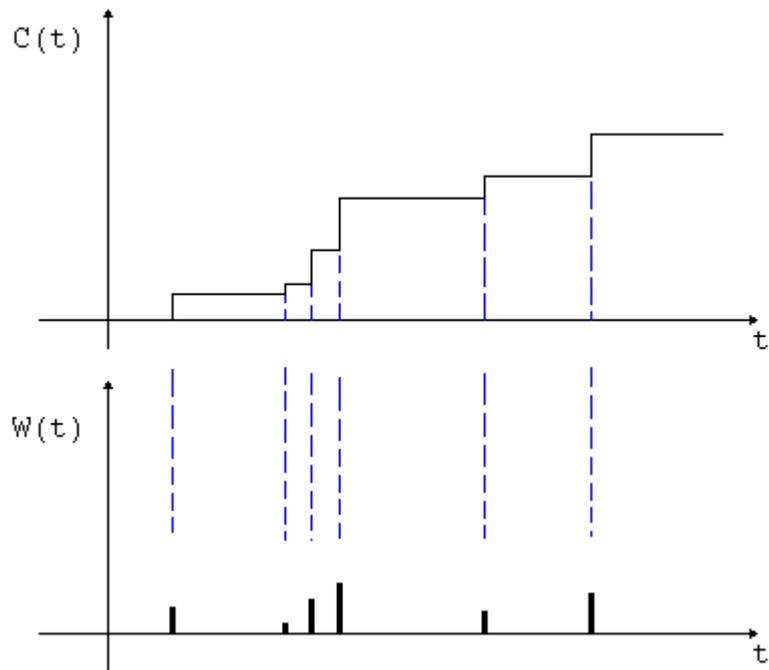


Figura 3.8.1 - Esempio di funzione di un processo di Poisson composto e di un processo di Poisson bianco

### 3.9. Processo normale delta-correlato

Il processo normale delta-correlato, anche detto "Rumore bianco gaussiano" o semplicemente "White-Noise",  $W^0(t)$  è un particolare tipo di processo delta-correlato caratterizzato dalla condizione

$$q^{(s)}(t) = 0 \quad \forall s > 2 \quad (3.55)$$

Esso è dunque completamente definito, da un punto di vista

probabilistico, dalle funzioni di correlazione seguenti

$$\begin{aligned} R_{W^0}^{(1)}(t) &= q^{(1)}(t) = \mu_{W^0}(t) \\ R_{W^0}^{(2)}(t_1 - t_2) &= q^{(2)}(t_1) \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (3.56)$$

mentre le correlazioni di ordine superiore sono nulle.

In particolare se il coefficiente  $q^{(2)}(t)$  non dipende dal tempo, si ha

un processo stazionario, perché la correlazione del secondo ordine

non dipenderà da  $t_1$  e  $t_2$  ma solo da  $\tau = t_1 - t_2$ . Se inoltre  $q^{(1)}(t) = 0$ , il

processo  $W^0(t)$  è a media nulla ed è detto "processo stazionario white-

noise a media nulla". In questo caso la funzione di correlazione si

scrive

$$R_{W^0}(\tau) = q^{(2)} \delta(\tau) \quad (3.57)$$

Effettuando la trasformata di Fourier di tale espressione si ricava

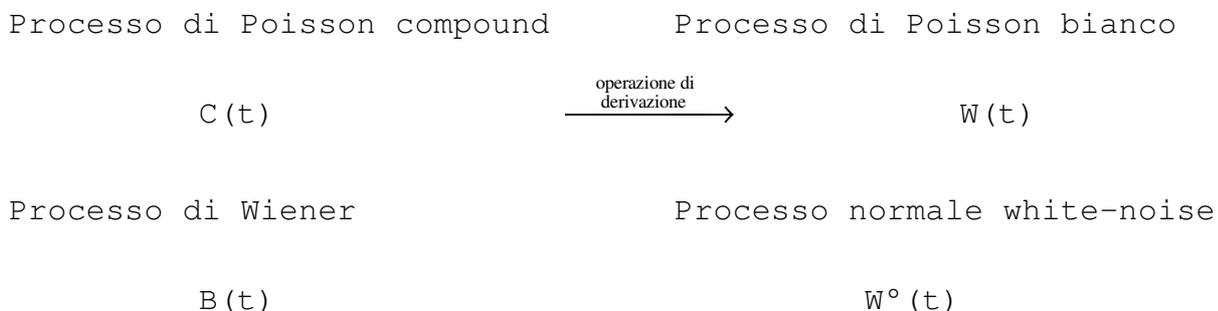
per la densità spettrale di potenza (PSD), la relazione

$$S_{W^0}(\omega) = \frac{q^{(2)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \delta(\tau) d\tau = \frac{q^{(2)}}{2\pi} \quad (3.58)$$

che permette di affermare che la densità spettrale di potenza di un rumore bianco gaussiano è costante per tutte le bande di frequenza; per tale motivo il processo è detto "rumore bianco", in analogia con il bianco ottico.

### 3.10. Processo di Wiener

Come il processo di Poisson bianco può essere ottenuto dalla derivata del processo di Poisson compound, così il processo normale white-noise può essere ottenuto dalla derivata formale di un'altro fondamentale processo detto "processo di Wiener"  $B(t)$ , caratterizzato dall'avere infinite fluttuazioni in un intervallo infinitesimo.



Si osservi infatti che se si hanno infinite fluttuazioni in un intervallo infinitesimo, si ha  $\lambda \rightarrow \infty$  e quindi

$$\lambda E[Y^2] = \text{cost} \quad (\text{se } \lambda \rightarrow \infty \Rightarrow E[Y^2] \rightarrow 0) \quad (3.59)$$

in conseguenza risulta

$$W(t) \rightarrow W^0(t). \quad (3.60)$$

In figura 3.10.1, sono riportati alcuni esempi di processi di Wiener.

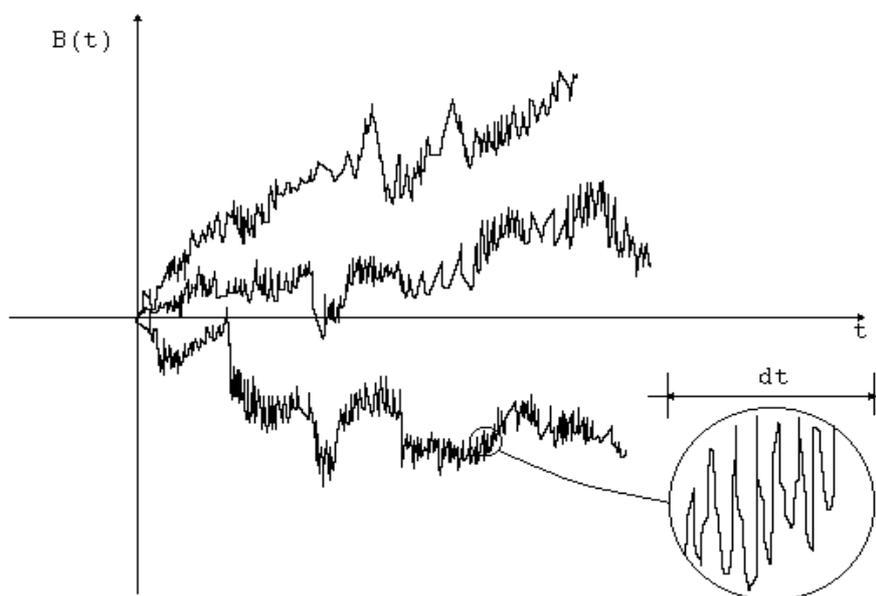


Figura 3.10.1 - Tre esempi di funzioni di un processo di Wiener

L'incremento del processo di Wiener  $dB(t)$ , è tale che

$$E[dB(t_1)dB(t_2)] = q^{(2)}\delta(t_1 - t_2)dt_1dt_2 \quad (3.61)$$

$$E[dB(t_1)dB(t_2) \dots dB(t_s)] = k_s[dB(t_1)dB(t_2) \dots dB(t_s)] = 0 \quad (3.62)$$

Posto  $t_1=t_2$  nella (3.61), ossia al lim per  $t_1, t_2 \rightarrow t$ , si ha

$$E[dB(t)^2] = k_2[dB] = q^2dt \quad (3.63)$$

inoltre, dalla (3.10.3) e dalle relazioni tra momenti e cumulanti si ha

$$k_s[dB(t)] = E[(dB(t))^s] = 0 \quad (3.64)$$

dalle quali segue che l'ordine di  $dB$  è  $dt^{1/2}$  e cioè

$$O(dB) = dt^{1/2} \quad (3.65)$$

infatti l'ordine di  $dB^2$  è  $dt$ .

### 3.11 Operazioni sui processi stocastici

Nel calcolo differenziale stocastico, [31], essendo i processi stocastici definiti in senso probabilistico, si ha la necessità di definire probabilisticamente anche le relative operazioni. Solo per completezza dell'argomento riportiamo quindi, in questo paragrafo, le operazioni fondamentali attinenti ai processi stocastici.

#### 3.11.1 Limiti

Dato un vettore di variabili aleatorie  $X_1, X_2, \dots, X_m, \dots$  diremo che esso "converge in valor quadratico medio" (m.s.c.: mean square convergence) alla variabile  $X$  al tendere di  $n$  all'infinito se risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^2] = 0 \quad (3.66)$$

in questo caso,  $X$  verrà chiamato "limite in valor quadratico medio"

e si scrive

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad (3.67a)$$

oppure

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad (3.67b)$$

oppure

$$X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X. \quad (3.67c)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché tale limite esista è che

$$E[|X_n|^2] < \infty \quad \forall n \quad (3.68)$$

Se  $\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  e  $\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$ , valgono inoltre le seguenti proprietà

fondamentali del limite in valor quadratico medio, e cioè

$$\text{i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X] \quad (3.69)$$

$$\text{ii)} \quad \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} (aX_n + bY_n) = aX + bY \quad (3.70)$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n Y_n] = E[XY] \quad (3.71)$$

### 3.11.2 Continuità

Il concetto di convergenza in valor quadratico medio può essere esteso ai processi stocastici  $X(t)$ , dove  $t$  è un parametro continuo.

Diremo che il processo stocastico  $X(t)$  è continuo in valor quadratico medio in  $t_0$  se risulta

$$\lim_{t \rightarrow t_0} E[|X(t) - X(t_0)|^2] = 0 \quad (3.72)$$

ossia

$$\text{l.i.m.}_{t \rightarrow t_0} X(t) = X(t_0) \quad (3.73)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché il processo sia continuo è che esista e sia finita la funzione di correlazione  $R_x(t_1 - t_2)$ .

### 3.11.3 Derivata

Si dice che un processo aleatorio è differenziabile in valor quadratico medio in  $t$ , se esiste il seguente limite, che definisce la derivata in valor quadratico medio del processo

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \text{l.i.m.}_{t \rightarrow t_0} \frac{X(t+\tau) - X(t)}{\tau} \quad (3.74)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché la derivata in valor quadratico medio esista è che

$$\frac{\partial^2 R_x(t_1 + t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} < \infty \quad (3.75)$$

### 3.11.4 Integrale di Riemann

Per definire l'integrale di Riemann in un processo stocastico, analogamente a quanto fatto nella definizione di integrale classico alla Riemann, si consideri un intervallo  $[a,b]$  suddiviso in  $n$  sottointervalli



sia, inoltre

i)  $a \equiv t_0 < t_1 < t_2 < t_3 \dots \dots < t_n \equiv b;$

ii)  $\Delta_n = \max_s (t_s - t_{s-1});$

iii)  $X(t)$  il processo stocastico;

iv)  $g(t, \tau)$  una funzione deterministica

v)  $\bar{t}_s$  un arbitrario punto dell'intervallo  $[t_{s-1}, t_s]$ .

Si definisce integrale di Riemann in valor quadratico medio il processo stocastico definito dalla relazione

$$Y(t) = \int_a^b X(\tau)g(t, \tau)d\tau = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_n \rightarrow 0}} \sum_{s=1}^n g(t, \bar{t}_s)X(\bar{t}_s)(t_s - t_{s-1}) \quad (3.76)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché esista il processo stocastico  $Y(t)$ , da intendersi come integrale di Riemann in valor quadratico medio, è che esista e sia finito l'integrale doppio di Riemann ordinario

$$\int_a^b \int_a^b g(t, \tau) g(s, \tau) E[X(t)X(s)] dt ds \quad (3.77)$$

### 3.11.5 Integrale di Riemann-Stieltjes

L'integrale di Riemann-Stieltjes in valor quadratico medio esprime un'estensione dell'integrale di Riemann in valor quadratico medio, del tipo

$$U = \int_a^b f(t) dX(t); \quad V = \int_a^b X(t) df(t) \quad (3.78)$$

essendo  $f(t)$  è una funzione deterministica assegnata.

In questo caso, se  $X(t)$  è differenziabile si ha

$$dX(t) = \dot{X}(t)dt \quad (3.79)$$

e quindi l'integrale (3.78) può essere calcolato alla Riemann. Analogamente il discorso vale per  $f(t)$ .

Se  $f(t)$  ed  $X(t)$  non sono differenziabili gli integrali  $U$  e  $V$  non possono calcolarsi alla Riemann, ma possono comunque essere valutati mediante le seguenti relazioni

$$U = \int_a^b f(t) dX(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_n \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\bar{t}_k) [X(t_k) - X(t_k - t_{k-1})] \quad (3.80)$$

$$V = \int_a^b X(t) df(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_n \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n X(\bar{t}_k) [f(t_k) - f(t_k - t_{k-1})] \quad (3.81)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché esista l'integrale (3.80) e (3.81), entrambi alla Riemann-Stieltjes è che esistano e siano finiti gli integrali

$$\int_a^b \int_a^b f(t)f(s)d^2E[X(t)X(s)] \quad (3.82)$$

$$\int_a^b E[X(t)X(s)]df(t)df(s) \quad (3.83)$$

#### **4. Modello stocastico dell'eccitazione sismica**

Il metodo di integrazione diretta previsto dalla normativa CEE, [40], consiste nel generare un insieme di accelerogrammi artificiali e di filtrarli successivamente attraverso la struttura in esame, (un accelerogramma, come già detto, è la storia nel tempo dell'accelerazione della terra durante un certo evento sismico). Tale metodo è di solito utilizzato soltanto ai fini della ricerca scientifica e per particolari problemi strutturali a causa del notevole sforzo computazionale connesso, dovuto principalmente alla generazione degli accelerogrammi artificiali, all'analisi dinamica al passo mediante integrazione delle equazioni differenziali per ognuno degli accelerogrammi suddetti ed infine alla valutazione delle grandezze statistiche di interesse nel problema in esame.

#### 4.1 Modelli disponibili in letteratura

Esistono in letteratura vari metodi che sono stati proposti negli ultimi quarant'anni per la generazione artificiale degli accelerogrammi sismici.

Il modello di Housner ad es., (1947), consiste nel ritenere l'accelerazione della terra come un processo di Poisson bianco (cfr. 3.7) definito da, [50]:

$$\ddot{x}_g(t) = \sum_k a^0 \delta(t - \tau_k) \quad (4.1)$$

dove  $\ddot{x}_g(t)$  è l'accelerazione della terra,  $a^0$  è una costante e gli istanti  $\tau_k$  sono uniformemente distribuiti nell'intervallo  $[0, t_f]$  essendo  $t_f$  la durata totale dell'eccitazione. Per  $k=1,2,\dots,n$ , il processo (4.1) è un processo di Poisson bianco con media pari a  $a^0 n / t_f$ ; questo valore positivo contrasta tuttavia con il valor medio nullo dell'accelerogramma (cfr. 2.2).

M. Di Paola e L. La Mendola, [41], propongono di rappresentare l'accelerazione della terra come un processo stazionario normale ottenuto mediante la sovrapposizione di un numero N di onde armoniche e cioè

$$\ddot{x}_g(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2G_{\ddot{x}_g}(\omega_k)\delta\omega} \cos(\omega_k t + \psi_k) \quad (4.2)$$

in cui N è il numero di intervalli di uguale ampiezza  $\delta\omega$  nel quale è suddiviso l'asse delle frequenze, e  $G_{\ddot{x}_g}(\omega_k) = \sum_{j=1}^N a_j W_j(\omega)$  è la densità spettrale di potenza (DSP) che si ipotizza compresa tra 0 ed  $\Omega_{\max} = N \delta\omega$  (frequenza massima, o di "cut-off").

Y. Matsushima, [2], studiando il sistema ad 1 g.d.l. non smorzato, ammette che l'eccitazione sismica sia da assumere pari al prodotto di due funzioni e cioè

$$\ddot{x}_g(t) = U(t)N(t) \quad (4.3)$$

essendo  $U(t)$  una funzione ad intervallo unitario, ed  $N(t)$  un processo stazionario aleatorio, avente la seguente densità di energia spettrale (DSP), secondo la proposta di Tajimi

$$S(\omega) = S_0 \frac{1+4h_g^2(\omega/\omega_g)^2}{[1-(\omega/\omega_g)^2]^2 + 4h_g^2(\omega/\omega_g)^2} \quad (4.4)$$

M. Yener ed H. Shen, [8], descrivono l'accelerazione della terra come un processo non stazionario rappresentato dal prodotto di un processo stazionario, (spettro di Kanai-Tajimi), per un appropriato fattore  $\phi(t)$  e cioè

$$\phi(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 & \text{per } 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 & \text{per } t_1 \leq t \leq t_2 \\ e^{e(t_2-t)} & \text{per } t_2 \leq t \leq t_d \end{cases} \quad (4.5)$$

dove  $t_1, t_2$  e  $c$  sono parametri statistici basati sul tipo di suolo, e  $t_d$  è la durata del terremoto.

Altri metodi per la generazione artificiale degli accelerogrammi sono riportati ad es. in [7,15,17,19,20,23].

#### **4.2 Modello di eccitazione artificiale proposto nel presente lavoro**

Gli studiosi, dall'esame delle caratteristiche dei terremoti reali attraverso le registrazioni sismiche disponibili, (cfr. ad es. cap.2), sono pervenuti alla conclusione che la rappresentazione dell'accelerazione della terra mediante un processo stazionario risulti di per se necessariamente limitata e non esauriente, a causa della dipendenza dal tempo dell'accelerazione di picco e della durata della fase di forte moto. In questo studio si propone pertanto un modello che prevede che la generazione artificiale della storia nel tempo del moto della terra,  $\ddot{x}_g(t)$ , venga effettuata, in accordo con Meyer ed altri, [23], mediante il prodotto di un processo stazionario

gaussiano  $g(t)$ , con media nulla e densità spettrale  $S(\omega)$ , per una funzione inviluppo deterministica  $s(t)$  e cioè mediante la legge

$$\ddot{x}_g(t) = s(t)g(t) \quad (4.6)$$

In particolare, la funzione inviluppo  $s(t)$  qui adottata è la funzione esponenziale, (fig.4.1),

$$s(t) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{e^{-\alpha t_n} - e^{-\beta t_n}} \quad t > 0 \quad (4.7)$$

in cui  $\alpha$  e  $\beta$  sono due costanti positive e  $t_n = \frac{1}{\alpha - \beta} \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$  con  $\alpha > \beta$ .

Il processo Gaussiano,  $g(t)$ , può essere a sua volta generato usando la tecnica "Monte Carlo", [42], attraverso la relazione

$$g(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^N \sqrt{G(\omega_k) \Delta\omega} \cos(\omega_k t - \phi_k) \quad (4.8)$$

dove:

$\phi_k$  sono fasi random uniformemente distribuite nell'intervallo  $[0-2\pi]$ ,

$\omega_k = k\Delta\omega$ ,  $N = \omega_u / \Delta\omega$ ,  $\omega_u$  esprime la frequenza massima cut-off,

$G(\omega_k) = 2 * S(\omega_k)$  essendo  $S(\omega_k)$  la funzione densità spettrale di potenza

(DSP) nella forma proposta da Kanai-Tajimi

$$S(\omega) = S_0 \frac{1+4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2}{[1-(\omega/\omega_g)^2]^2 + 4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2} \quad (4.9)$$

Nella precedente relazione  $\omega_g$  è la frequenza caratteristica della terra,  $\xi_g$  è il coefficiente di smorzamento predominante, ed  $S_0$  è l'intensità di un processo Gaussiano white-noise, (cap.3), legata all'accelerazione di picco dalla relazione proposta da Shinozuka, [24],

$$PGA = p_g \sqrt{\pi \omega_g \left( \frac{1}{2\xi_g} + 2\xi_g \right)} \quad (4.10)$$

La figura 4.2 mostra una tipica storia nel tempo di un terremoto generato artificialmente con la tecnica prima delineata; mentre la figura 4.3 mostra il corrispondente istogramma delle frequenze relative, (dal quale si deduce che l'accelerogramma generato è a media nulla). Tali grafici possono essere utilmente confrontati con quelli relativi alle registrazioni sismiche reali (cfr. figg. 2.2, 2.3) per coglierne le peculiari differenze.

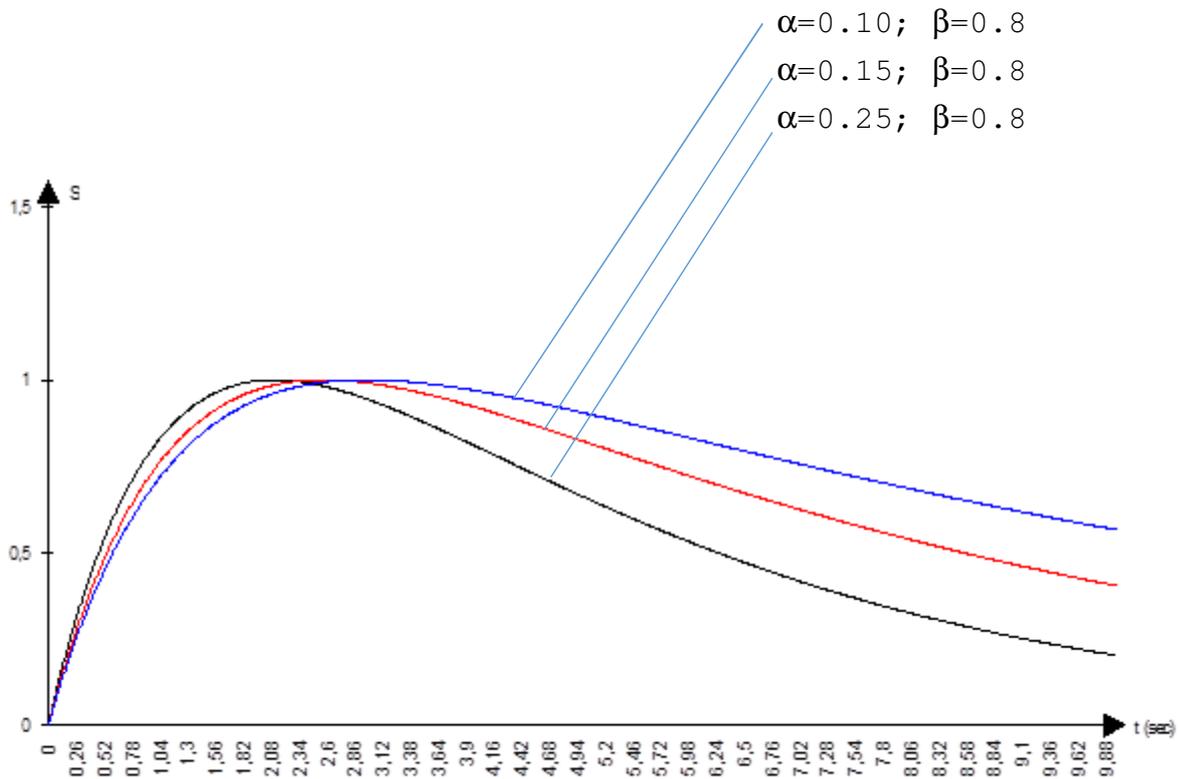


Figura 4.1 - Funzione involuppo esponenziale

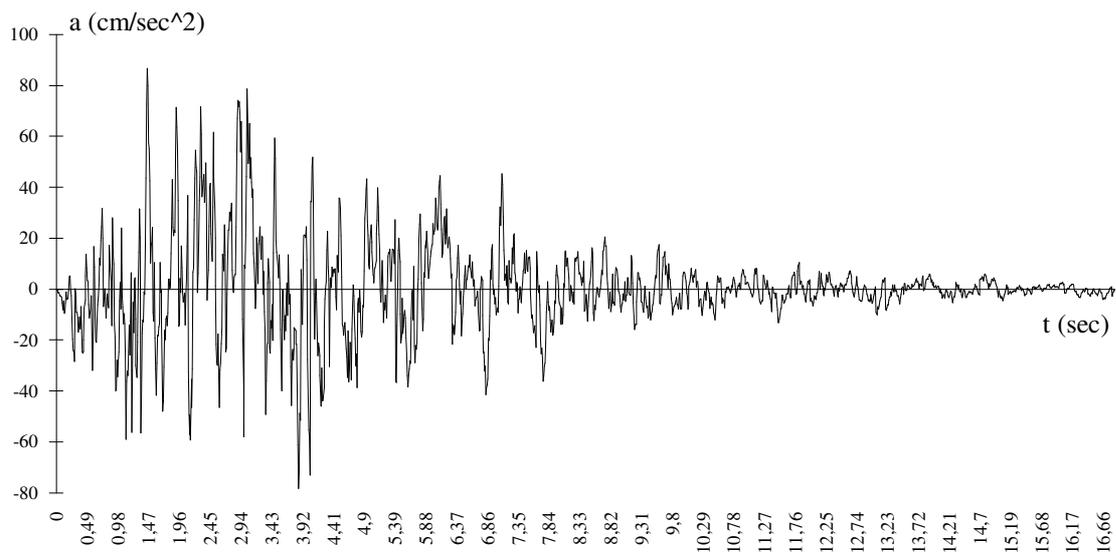


Figura 4.2 - Accelerogram generato artificialmente

Classe	Frequenza assoluta	Frequenza relativa
-80 / -75	1	0,00059
-75 / -70	2	0,00119
-70 / -65	0	0
-65 / -60	1	0,00059
-60 / -55	8	0,00474
-55 / -50	1	0,00059
-50 / -45	9	0,00534
-45 / -40	10	0,00593
-40 / -35	17	0,01008
-35 / -30	27	0,01601
-30 / -25	28	0,01661
-25 / -20	39	0,02313
-20 / -15	53	0,03144
-15 / -10	85	0,05042
-10 / -5	157	0,09312
-5 / 0	416	0,24674
0 / 5	413	0,24496
5 / 10	142	0,08422
10 / 15	74	0,04389
15 / 20	51	0,03025
20 / 25	47	0,02788
25 / 30	16	0,00949
30 / 35	22	0,01305
35 / 40	13	0,00771
40 / 45	16	0,00949
45 / 50	9	0,00534
50 / 55	8	0,00474
55 / 60	4	0,00237
60 / 65	3	0,00178
65 / 70	5	0,00297
70 / 75	6	0,00356
75 / 80	2	0,00119
80 / 85	0	0
85 / 90	1	0,00059

somma=1686

somma=1

MEDIA=0.067749

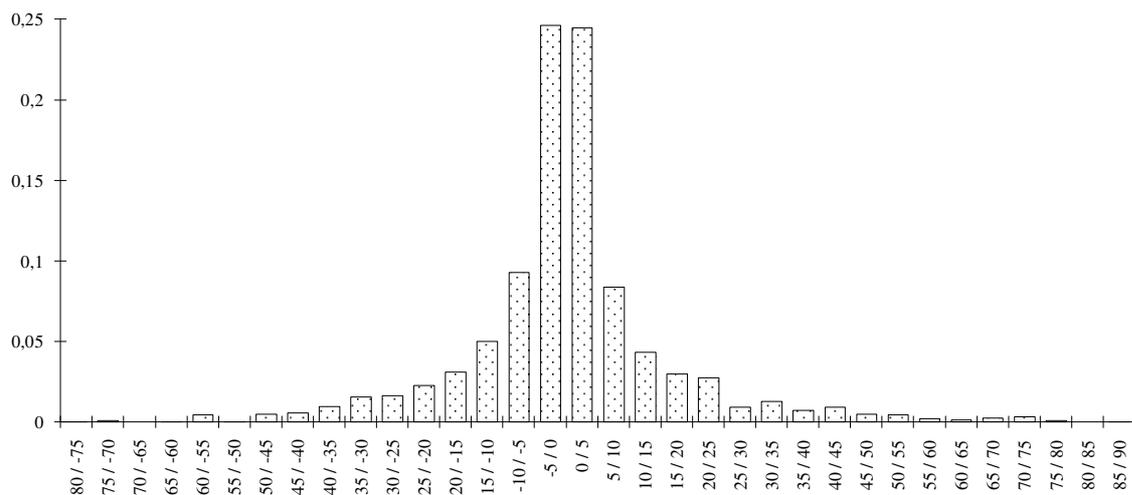


Figura 4.3 - Istogramma delle frequenze relative, per un accelerogramma generato artificialmente

## 5. Analisi dinamica nonlineare di strutture in c.a. e valutazione del danneggiamento

Nell'analisi delle strutture aventi comportamento elastico lineare, soggette ad un arbitrario carico dinamico  $p(t)$ , la risposta al tempo  $t$  può essere ricavata, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come la somma delle risposte agli impulsi  $p(\tau)d\tau$  che precedono il tempo  $t$ , ossia, supponendo che il sistema sia in quiete al tempo  $t_0=0$ , per mezzo dell'integrale di convoluzione o integrale di Duhamel

$$x(t) = \int_0^t p(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (5.1)$$

Nella maggior parte dei casi il carico dinamico è caratterizzato da leggi che non permettono di effettuare analiticamente la valutazione dell'integrale di Duhamel, altre volte, inoltre, lo stesso carico è possibile conoscerlo come funzione campionata, cioè conosciuta ad istanti discreti di tempo; in tutti questi casi occorre, pertanto risolvere l'equazione (5.1) mediante l'integrazione

numerica, (metodo dei rettangoli, dei trapezi, regola di Simpson, ecc.).

Si osservi inoltre che il principio di sovrapposizione si può applicare soltanto se il sistema è lineare, ossia solo se le sue proprietà rimangono costanti durante tutto il tempo per il quale si valuta la risposta.

Vi è invece un'importante classe di problemi di dinamica strutturale in cui il sistema non può essere considerato lineare, ad es. nel caso di strutture soggette a severi moti sismici. Infatti, il criterio stesso su cui si basa l'ingegneria sismica è il seguente: "Se si verifica un terremoto moderato la struttura deve rimanere in campo elastico e non devono subire danni neanche le opere secondarie; per terremoti di media entità la struttura deve ancora rimanere in campo elastico mentre sono ammessi danneggiamenti alle opere secondarie; per gli eventi straordinari catastrofici non può essere più oltre ipotizzato che la struttura rimanga in campo elastico, e

si accetta cioè la possibilità che si manifestino in essa deformazioni plastiche, purché però non si abbia il crollo della struttura". Pertanto, nel caso di severi moti sismici, si deve tener conto del fatto che, nella struttura, le sue caratteristiche meccaniche si modificano durante la risposta. Conseguentemente è necessario sviluppare più appropriati metodi di analisi, adatti per lo studio dei sistemi in regime non lineare.

Una delle procedure più estesamente usate per l'analisi nonlineare è l'integrazione del passo delle equazioni del moto, [32], secondo cui la risposta è valutata in una serie di piccoli intervalli di tempo  $\Delta t$ , generalmente tutti della stessa ampiezza, per convenienza computazionale. La natura nonlineare del sistema viene messa in conto mediante il calcolo delle nuove proprietà che il sistema assume nello stato deformato all'inizio di ogni intervallo di tempo. La risposta al tempo  $t$  viene quindi calcolata usando la

velocità e lo spostamento calcolati all'istante  $t-\Delta t$ , come condizioni iniziali per il nuovo intervallo.

### 5.1. Sistemi ad un grado di libertà

Come sappiamo l'equazione del moto di un sistema lineare ad un grado di libertà, (cfr. figura 5.1.1), soggetto ad una forzante  $p(t)$  può scriversi nella forma

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t) \quad (5.2)$$

Nel caso particolare in cui l'azione esterna non è una forza bensì uno spostamento impresso alla base  $x_g(t)$  l'equazione del moto è sempre la (5.2) a patto di sostituire  $p(t)$  con il carico equivalente all'eccitazione alla base:  $p_{eq}(t) = -m\ddot{x}_g(t)$ .

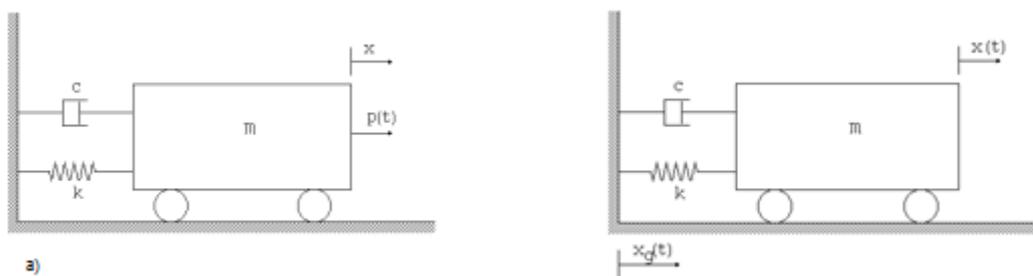


Figura 5.1.1 - Sistema dinamico elementare: a) risposta forzata;  
b) vibrazioni libere

Se il sistema non è lineare, e cioè se nella struttura si modificano le proprie caratteristiche meccaniche durante la risposta, l'equazione del moto va riscritta, tenendo conto del fatto che anche  $c$  e  $k$  sono funzioni del tempo; si ha dunque

$$m\ddot{x}(t) + c(t)\dot{x}(t) + k(t)x(t) = p(t) \quad (5.3)$$

ossia

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (5.4)$$

dove però  $f_S$  non è più una forza puramente elastica, proprio perché il comportamento della struttura si esplica in regime non lineare.

### 5.1.1.1. Equazione del moto in forma incrementale

In regime di comportamento non lineare ed al tempo  $t+\Delta t$

l'equazione del moto (5.4) assume la forma

$$f_I(t + \Delta t) + f_D(t + \Delta t) + f_S(t + \Delta t) = p(t + \Delta t) \quad (5.5)$$

sottraendo membro a membro la (5.5) e la (5.4) si ottiene pertanto

l'equazione del moto in forma incrementale

$$\Delta f_I(t) + \Delta f_D(t) + \Delta f_S(t) = \Delta p(t) \quad (5.6)$$

nella quale compaiono le forze incrementali

$$\Delta f_I(t) = f_I(t + \Delta t) - f_I(t) \quad (5.7a)$$

$$\Delta f_D(t) = f_D(t + \Delta t) - f_D(t) \quad (5.7b)$$

$$\Delta f_S(t) = f_S(t + \Delta t) - f_S(t) \quad (5.7c)$$

$$\Delta p(t) = p(t + \Delta t) - p(t) \quad (5.7d)$$

Osserviamo adesso che essendo assegnato il carico  $p(t)$ , ed una volta che è stato fissato il valore di  $\Delta t$ , come si vede dalla figura 5.1.1.1, è possibile calcolare esattamente  $\Delta p(t)$ .

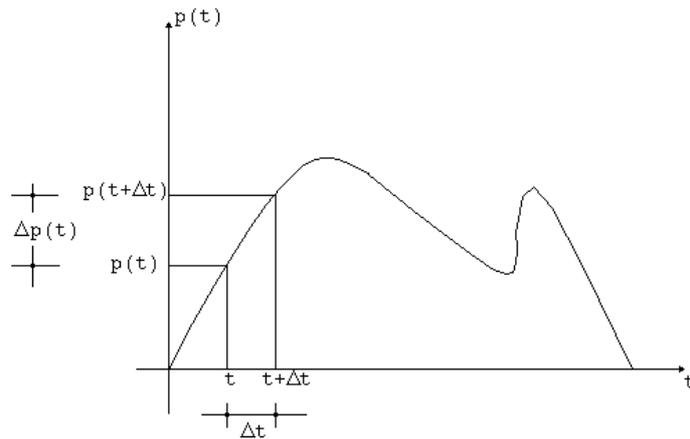


Figura 5.1.1.1 - Legge temporale del carico applicato alla struttura

Infatti, indicati con  $c(t)$  e  $k(t)$  le proprietà meccaniche associate allo smorzamento ed alla rigidezza, dipendenti rispettivamente dai valori della velocità e dello spostamento misurati durante l'intervallo di tempo considerato, (cfr. figure 5.1.1.2a e 5.1.1.2b), si hanno le relazioni (approssimate)

$$\Delta f_D(t) = c(t)\Delta \dot{x}(t) \quad (5.8)$$

$$\Delta f_S(t) = k(t)\Delta x(t) \quad (5.9)$$

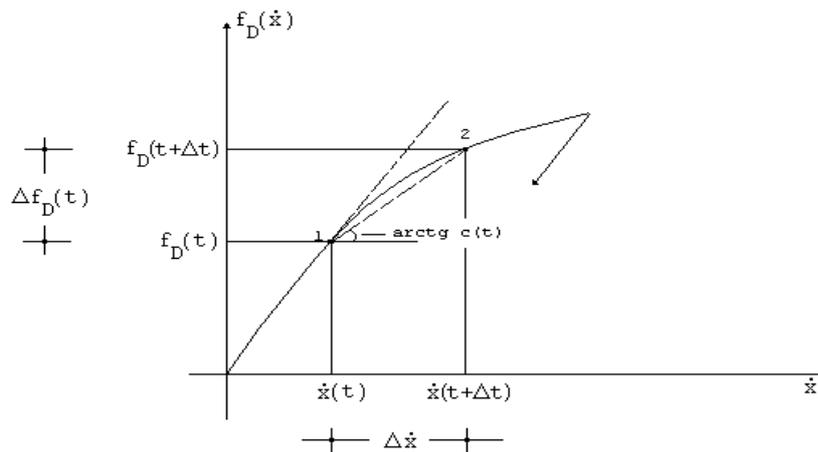


Figura 5.1.1.2a - Esempio di smorzamento non lineare

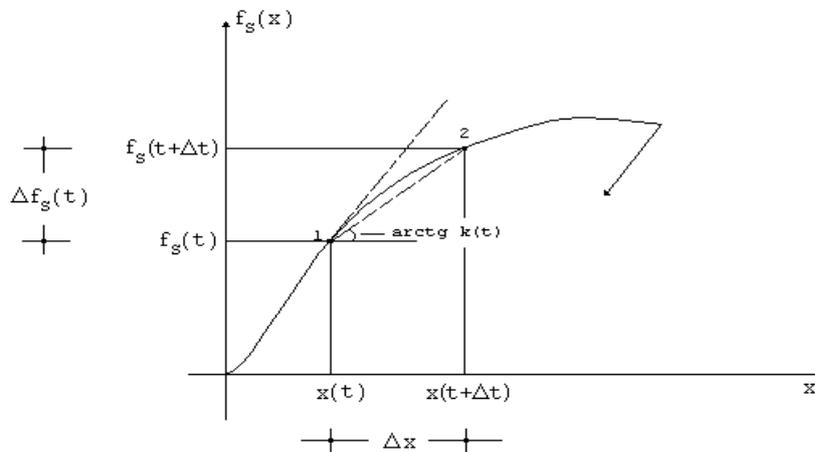


Figura 5.1.1.2b - Esempio di rigidità non lineare

Supponendo altresì che la massa rimanga costante in  $\Delta t$ , si ha

$$\Delta f_l(t) = m\Delta\ddot{x}(t) \quad (5.10)$$

Sulla base delle superiori considerazioni l'equazione del moto può dunque scriversi nella forma

$$m\Delta\ddot{x}(t) + c(t)\Delta\dot{x}(t) + k(t)\Delta x(t) = \Delta p(t) \quad (5.11)$$

Si osserva che se possono risultare noti la velocità e lo spostamento all'inizio di ciascun intervallo, non sono ancora determinati  $\Delta x(t)$  e  $\Delta \dot{x}(t)$ ,  $c(t)$  e  $k(t)$ . In prima approssimazione si può affermare che la pendenza della secante 1-2 può essere posta pari a quella della tangente nel punto 1, per cui si può anche porre

$$c(t) = \left(\frac{df_p}{d\dot{x}}\right)_t \quad k(t) = \left(\frac{df_s}{dx}\right)_t \quad (5.12)$$

### 5.1.2. Procedura di integrazione al passo

Supponendo che l'accelerazione  $\ddot{x}(t)$  vari linearmente nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  (fig. 5.1.2.1), nel generico istante  $t+\tau$  interno all'intervallo  $[t, t+\Delta t]$  si ha

$$\ddot{x}(t + \tau) = \ddot{x}(t) + \frac{\Delta \ddot{x}(t)}{\Delta t} \tau \quad (5.13)$$

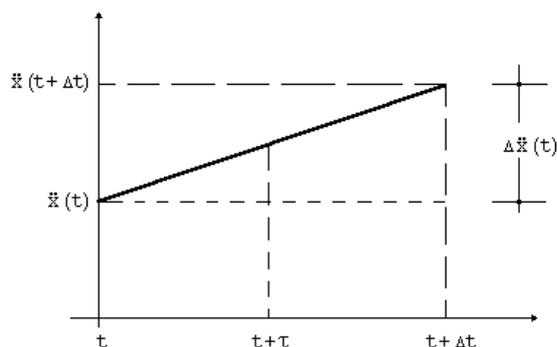


Figura 5.1.2.1 - Ipotesi di legge lineare dell'accelerazione nell'intervallo di tempo generico

Da tale relazione, integrando due volte rispetto  $\tau$  si ha

$$\begin{cases} \dot{x}(t + \tau) = \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\tau + \frac{\Delta\ddot{x}(t)}{\Delta t} \frac{\tau^2}{2} \\ x(t + \tau) = x(t) + \dot{x}(t)\tau + \ddot{x}(t) \frac{\tau^2}{2} + \frac{\Delta\ddot{x}(t)}{\Delta t} \frac{\tau^3}{6} \end{cases} \quad (5.14)$$

da cui, per  $\tau = \Delta t$

$$\begin{cases} \dot{x}(t + \Delta t) - \dot{x}(t) = \ddot{x}(t)\Delta t + \frac{\Delta\ddot{x}(t)}{\Delta t} \frac{\Delta t^2}{2} \\ x(t + \Delta t) - x(t) = \dot{x}(t)\Delta t + \ddot{x}(t) \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta\ddot{x}(t)}{\Delta t} \frac{\Delta t^3}{6} \end{cases} \quad (5.15)$$

Ossia

$$\begin{cases} \Delta\dot{x}(t) = \ddot{x}(t)\Delta t + \Delta\ddot{x}(t) \frac{\Delta t}{2} \\ \Delta x(t) = \dot{x}(t)\Delta t + \ddot{x}(t) \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta\ddot{x}(t) \frac{\Delta t^2}{6} \end{cases} \quad (5.16)$$

Dalla seconda di queste si ha

$$\Delta\ddot{x}(t) = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta x(t) - \frac{6}{\Delta t} \dot{x}(t) - 3\ddot{x}(t) \quad (5.17)$$

e sostituendo nella prima

$$\Delta\dot{x}(t) = \frac{3}{\Delta t} \Delta x(t) - 3\dot{x}(t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}(t) \quad (5.18)$$

Infine, sostituendo i valori di  $\Delta\dot{x}(t)$  e  $\Delta\ddot{x}(t)$  nell'equazione incrementale del moto (5.11), si ottiene

$$m \left[ \frac{6}{\Delta t^2} \Delta x(t) - \frac{6}{\Delta t} \dot{x}(t) - 3\ddot{x}(t) \right] + c(t) \left[ \frac{3}{\Delta t} \Delta x(t) - 3\dot{x}(t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}(t) \right] + k(t) \Delta x(t) = \Delta p(t) \quad (5.19)$$

da cui

(5.20)

$$\underbrace{m \left[ \frac{6}{\Delta t^2} \Delta x(t) - \frac{6}{\Delta t} \dot{x}(t) - 3\ddot{x}(t) \right] \Delta x(t)}_{\tilde{k}(t)} = \underbrace{\Delta p(t) + m \left[ \frac{6}{\Delta t} \dot{x}(t) + 3\ddot{x}(t) \right] + c(t) \left[ 3\dot{x}(t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{x}(t) \right]}_{\Delta \tilde{p}(t)}$$

ossia

$$\tilde{k}(t) \Delta x(t) = \Delta \tilde{p}(t) \quad (5.21)$$

ed infine

$$\Delta x(t) = \frac{\Delta \tilde{p}(t)}{\tilde{k}(t)} \quad (5.22)$$

Ricavato  $\Delta x(t)$  mediante tale relazione, è possibile calcolare  $\Delta\dot{x}(t)$  e  $\Delta\ddot{x}(t)$  e quindi, risultando pure noti  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$  una volta ricavati  $\Delta x(t)$ ,  $\Delta\dot{x}(t)$ ,  $\Delta\ddot{x}(t)$  si possono determinare le misure seguenti

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x(t) \\ \dot{x}(t + \Delta t) = \dot{x}(t) + \Delta\dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t + \Delta t) = \ddot{x}(t) + \Delta\ddot{x}(t) \end{cases} \quad (5.23)$$

I valori ora trovati possono essere considerati come quelli di partenza per ripetere lo stesso procedimento per il passo  $\Delta t$  successivo; per cui, cominciando dai valori iniziali di  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$  si perviene alla soluzione dell'equazione per passi  $\Delta t$  successivi.

Si osservi infine che il procedimento sopradelineato può essere applicato a fortiori anche al caso di sistemi lineari, basta infatti considerare  $c=\text{cost}$  e  $k=\text{cost}$ .

## 5.2. Sistemi a molti gradi di libertà

Com'è noto l'equazione del moto di un sistema lineare ad  $n$  gradi di libertà può scriversi

$$M\ddot{\underline{x}}(t) + C\dot{\underline{x}}(t) + K\underline{x}(t) = \underline{p}(t) \quad (5.24)$$

in cui  $M$ ,  $C$  e  $K$  sono matrici di ordine  $n$ , rispettivamente note come matrice di massa, matrice di smorzamento e matrice di rigidità. Nel caso particolare in cui l'azione esterna è uno spostamento impresso alla base, analogamente al caso già studiato di sistema ad 1 g.d.l., l'equazione del moto è sempre la (5.24) a meno di sostituire al vettore dei carichi esterni il nuovo vettore  $\underline{p}_{eq}(t) = -M\underline{r}\ddot{x}_g$ , in cui  $\underline{r}$  è il vettore unità e cioè  $\underline{r}^T = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]$ .

In regime non lineare, poiché le proprietà fisiche non rimangono costanti durante l'evoluzione della risposta dinamica, (i coefficienti della matrice di rigidità  $k_{ij}$  possono risultare modificati ad es. per il raggiungimento della soglia di snervamento nei materiali, ed anche i coefficienti delle matrici di massa e di

smorzamento possono subire cambiamenti), si ha una sostanziale alterazione nelle caratteristiche di vibrazione del sistema è quindi non è possibile risolvere l'equazione del moto con i metodi classici quale ad es. l'analisi modale.

L'unico metodo che risulta applicabile in generale per l'analisi di un arbitrario sistema in regime non lineare è l'integrazione numerica al passo dell'equazione del moto, la cui procedura riferita ai sistemi con molti gradi di libertà può essere analoga al caso di sistema non lineare ad 1 g.d.l. La storia della risposta viene suddivisa in intervalli di tempo piccoli e tra di loro uguali, e la risposta viene calcolata durante ogni intervallo come se il sistema fosse caratterizzato da comportamento lineare nell'intervallo con le sue proprietà determinate all'inizio dell'intervallo stesso. Alla fine di ciascun intervallo le proprietà vengono ricalcolate conformemente allo stato di deformazione e di sforzo presente nel sistema a tale tempo.

Si osservi inoltre che, anche nel caso di sistemi con molti gradi di libertà, la procedura di integrazione al passo può essere applicata anche ai sistemi lineari, ed il calcolo risulta di molto semplificato, in quanto non è necessario modificare le proprietà strutturali ad ogni intervallo. In alcuni casi è vantaggioso usare questo approccio di integrazione diretta piuttosto che l'analisi modale perché esso non richiede la valutazione dei modi di vibrazione e delle frequenze, fatto abbastanza arduo nei sistemi a molti gradi di libertà.

#### **5.2.1. Equazione del moto incrementale ed integrazione al passo**

L'equazione che esprime in forma incrementale l'equilibrio delle forze agenti durante un intervallo di tempo  $\Delta t$ , può essere ottenuta in forma matriciale analogamente al caso di sistema ad 1 g.d.l. La differenza tra la relazione di equilibrio al tempo  $t+\Delta t$  e la relazione

di equilibrio al tempo  $t$  fornisce l'equazione del moto in forma incrementale

$$\Delta \underline{f}_I(t) + \Delta \underline{f}_D(t) + \Delta \underline{f}_S(t) = \Delta \underline{p}(t) \quad (5.25)$$

in cui

$$\begin{cases} \Delta \underline{f}_I(t) = \underline{f}_I(t + \Delta t) - \underline{f}_I(t) = M \Delta \underline{\ddot{x}}(t) \\ \Delta \underline{f}_D(t) = \underline{f}_D(t + \Delta t) - \underline{f}_D(t) = C \Delta \underline{\dot{x}}(t) \\ \Delta \underline{f}_S(t) = \underline{f}_S(t + \Delta t) - \underline{f}_S(t) = K \Delta \underline{x}(t) \\ \Delta \underline{p}(t) = \underline{p}(t + \Delta t) - \underline{p}(t) \end{cases} \quad (5.26)$$

Gli elementi delle matrici di smorzamento e di rigidità  $c_{ij}(t)$  e  $k_{ij}(t)$ , analogamente al caso di sistema ad 1 g.d.l. (figura 5.2.1.1), possono porsi in modulo pari alla pendenza della tangente nel punto iniziale dell'intervallo considerato e cioè

$$c_{ij}(t) = \left( \frac{df_{Di}}{dx_j} \right)_t \quad k_{ij}(t) = \left( \frac{df_{Si}}{dx_j} \right)_t \quad (5.27)$$

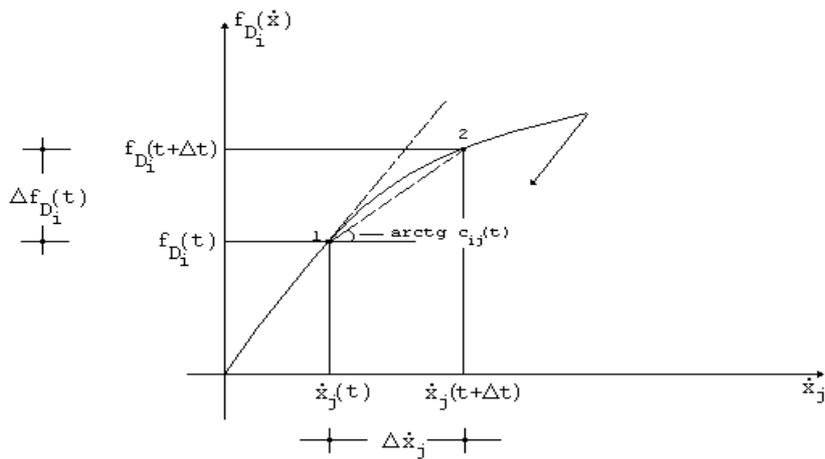


Figura 5.2.1.1a - Esempio di elementi di natura nonlineare, nella matrice di smorzamento

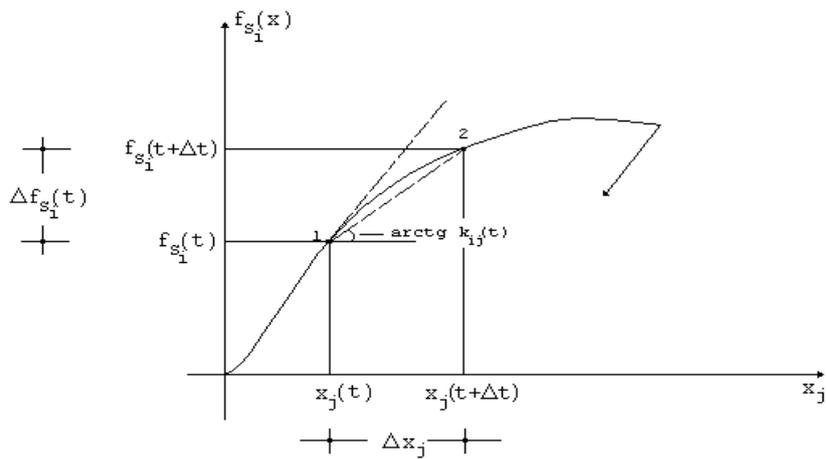


Figura 5.2.1.1b - Esempio di elementi di natura nonlineare, nella matrice di rigidezza

Sostituendo le (5.26) nell'equazione del moto in forma incrementale (5.25), la stessa diventa:

$$M\Delta\ddot{x}(t) + C\Delta\dot{x}(t) + K\Delta x(t) = \Delta p(t) \quad (5.28)$$

L'operazione di base nella risoluzione del sistema di n equazioni differenziali (5.28) è costituita dalla loro conversione in un set

di equazioni algebriche. Ciò viene fatto mediante l'introduzione delle semplici relazioni tra spostamento, velocità ed accelerazione, che si possono assumere valide in un piccolo intervallo di tempo.

Per il sistema a molti gradi di libertà si ammette che l'accelerazione vari linearmente nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , analogamente al caso di sistema ad 1 g.d.l. pertanto si ricava la relazione

$$\tilde{K}(t)\Delta\underline{x}(t) = \Delta\underline{p}(t) \quad (5.29)$$

in cui si è posto

$$\tilde{K}(t) = M \frac{6}{\Delta t^2} + C(t) \frac{3}{\Delta t} + K(t) \quad (5.30)$$

$$\Delta\underline{\tilde{p}}(t) = \Delta\underline{p}(t) + M \left[ \frac{6}{\Delta t} \underline{\dot{x}}(t) + 3\underline{\ddot{x}}(t) \right] + C(t) \left[ 3\underline{\dot{x}}(t) + \frac{\Delta t}{2} \underline{\ddot{x}}(t) \right] \quad (5.31)$$

Determinato il vettore incrementale degli spostamenti  $\Delta\underline{x}(t)$  dalla (5.29), mediante ad es. la decomposizione di Gauss o di Choleski, si può ottenere il vettore incrementale delle velocità dalla relazione:

$$\Delta\underline{\dot{x}}(t) = \frac{3}{\Delta t} \Delta\underline{x}(t) - 3\underline{\dot{x}}(t) - \frac{\Delta t}{2} \underline{\ddot{x}}(t) \quad (5.32)$$

Lo spostamento e la velocità alla fine dell'intervallo sono quindi ottenuti mediante le relazioni

$$\underline{x}(t + \Delta t) = \underline{x}(t) + \Delta \underline{\dot{x}}(t) \quad (5.33)$$

$$\underline{\dot{x}}(t + \Delta t) = \underline{\dot{x}}(t) + \Delta \underline{\ddot{x}}(t) \quad (5.34)$$

Dopo aver determinato le superiori grandezze è possibile ricavare i vettori delle forze di smorzamento ed elastiche, (cfr. fig. 5.2.1.1),  $\underline{f}_D(t + \Delta t)$  ed.  $\underline{f}_s(t + \Delta t)$

Infine, imponendo le condizioni di equilibrio dinamico al tempo  $t + \Delta t$  si ha

$$\underline{f}_I(t + \Delta t) + \underline{f}_D(t + \Delta t) + \underline{f}_s(t + \Delta t) = \underline{p}(t + \Delta t) \quad (5.35)$$

tenendo presente altresì che  $\underline{f}_I(t + \Delta t) = M \underline{\ddot{x}}(t + \Delta t)$ , è possibile determinare il vettore accelerazione al tempo  $t + \Delta t$  nella forma

$$\underline{\ddot{x}}(t + \Delta t) = M^{-1}[\underline{p}(t + \Delta t)] - \underline{f}_D(t + \Delta t) - \underline{f}_s(t + \Delta t) \quad (5.36)$$

I vettori così ottenuti per lo spostamento, la velocità e l'accelerazione al tempo  $t + \Delta t$ , rappresentano le condizioni iniziali per il successivo passo.

### 5.2.2. Stabilità numerica dell'algorithmo di soluzione

In alternativa al metodo dell'accelerazione lineare descritto sopra, possono adottarsi altri metodi basati su ipotesi semplificative sulle variabili oppure sulla forzante. A.E.Kanaan e G.H.Powell, [33], utilizzano ad es. il metodo dell'accelerazione costante nell'intervallo  $[t, t+\Delta t]$ ; R.W.Clough e J.Penzien, [32], propongono di adottare in alternativa al metodo dell'accelerazione lineare, il metodo di Wilson- $\theta$  in cui si ipotizza che l'accelerazione sia lineare nell'intervallo  $[t, t+\theta\Delta t]$ ; G. Borino, [41], suggerisce l'impiego di un metodo che consente di valutare la risposta al passo senza introdurre alcuna ipotesi sulla risposta, ma modellando la forzante all'interno del passo.

Uno dei problemi che richiede maggiore attenzione da parte di coloro che utilizzano procedimenti al passo è quello legato alla stabilità numerica del metodo di integrazione adottato. Ad es. il metodo dell'accelerazione lineare fornisce un'efficiente procedura di

integrazione al passo, purché si usi un intervallo di integrazione sufficientemente piccolo. In generale l'analisi dimostra essere accurata per moti di strutture associati con periodi di vibrazione grandi almeno 5-10 volte l'intervallo di integrazione; tale metodo è dunque solo condizionatamente stabile. Il metodo dell'accelerazione costante, ha invece il vantaggio di essere stabile per qualsiasi periodo ed intervallo di integrazione, (così come il metodo di Wilson- $\theta$ ); anche se, per periodi lunghi, appare leggermente meno preciso del metodo dell'accelerazione lineare; tuttavia esso si può ritenere sufficientemente accurato per gli scopi pratici.

### **5.3. Modelli matematici nonlineari della forza di richiamo strutturale**

In letteratura sono stati da tempo proposti vari modelli per studiare gli effetti della non linearità meccanica del materiale sulla risposta strutturale. In particolare, così come avviene nel caso dell'azione sismica di natura eminentemente ciclica, in cui l'eventuale danneggiamento può essere provocato anche dalle ripetute forze oscillatorie, si ha la necessità di definire, in aggiunta ai modelli di comportamento nonlineare sotto azioni monotoniche, anche quelli che permettono di cogliere il comportamento isteretico degli elementi che compongono la struttura.

Per studiare la risposta inelastica della struttura occorre pertanto predisporre un modello matematico delle "forze di richiamo", e cioè è necessario definire le relazioni che intercorrono tra le forze agenti e gli spostamenti correlativi. Per una sequenza

progressiva di cicli di carico e scarico la curva che unisce i valori massimi delle varie curve forza-spostamento proprie di ogni ciclo di carico viene chiamata "curva scheletro". In molti casi della pratica tale curva coincide con quella propria del caricamento monotono.

Quasi tutti i modelli che traducono il comportamento forza-spostamento dell'elemento strutturale, sono basati sulle risultanze di indagini sperimentali ed alcuni di essi tengono anche conto della degradazione della rigidezza e della resistenza che si manifesta durante un caricamento ciclico. Una breve descrizione dei suddetti modelli, tra quelli maggiormente utilizzati in letteratura, viene riportata qui di seguito.

### **5.3.1. Modello isteretico bilineare**

Questo modello assegna un valore positivo alla pendenza del legame forza-spostamento che si produce al di là del limite di comportamento puramente elastico lineare. Questo limite, per comodità

di esposizione verrà indicato nel seguito come "limite di snervamento". In questo modo si possono simulare gli effetti di "incrudimento" da deformazione sia nelle strutture in acciaio che in quelle in cemento armato (cfr. fig. 5.3.1).

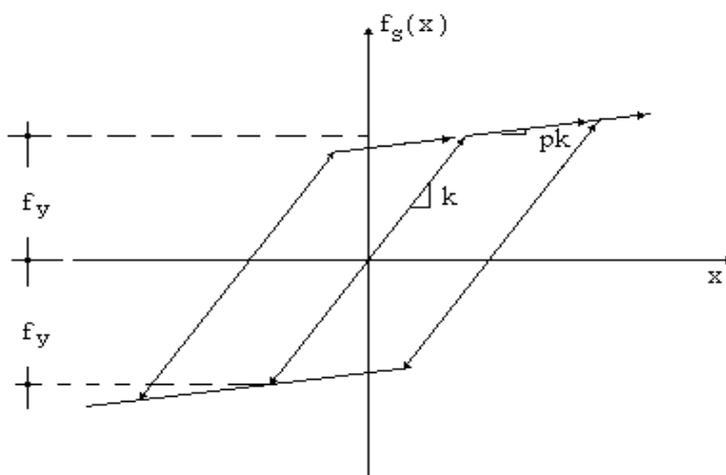


Figura 5.3.1 - Modello isteretico bilineare della forza di richiamo

La sua curva, per materiale allo stato vergine e per carico

monotonicamente crescente, può essere espressa come segue

$$f_s(x) = \begin{cases} kx & -x_y \leq x \leq x_y \\ k[px + (1-p)x_y] & x \geq x_y \\ k[px - (1-p)x_y] & x \leq -x_y \end{cases} \quad (5.37)$$

avendo indicato con  $k$  la rigidezza iniziale e con  $p$  un fattore, detto rapporto di incrudimento da deformazione, pari al rapporto tra la rigidezza postelastica e la rigidezza elastica.

### 5.3.2. Modello elastico - perfettamente plastico

Il modello isteretico elastico-perfettamente plastico, riportato in figura 5.3.2, può essere utilmente applicato ad es. al caso di strutture intelaiate in acciaio, dotate di elevata capacità di deformazione (o duttilità). La relativa legge può essere ottenuta da quella propria del modello bilineare precedente ponendo  $p=0$ .

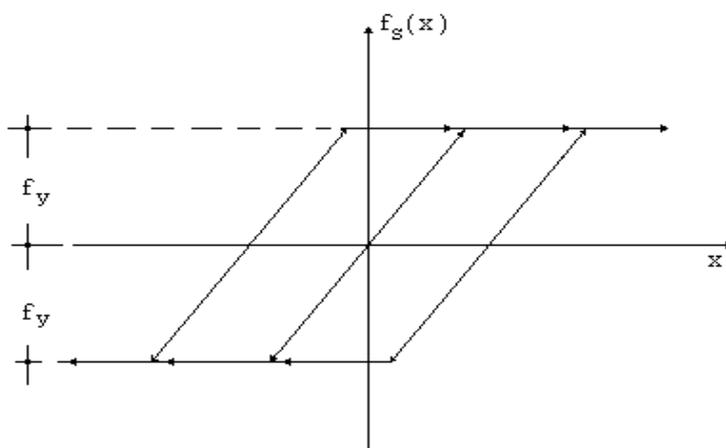


Figura 5.3.2 - Modello isteretico elastico - perfettamente plastico

### 5.3.3 Modello isteretico modificato, o di Clough

Questo modello, inizialmente proposto da Clough, [32], prevede una curva primaria bilineare. Successivamente fu aggiunta al modello una modifica in modo che il punto di risposta potesse spostarsi immediatamente in direzione del punto di scarico A, durante la fase di ricarico, così come mostrato in figura 5.3.3. Quando il punto di risposta raggiunge il punto A, esso si muove in direzione del precedente punto di risposta massima C.

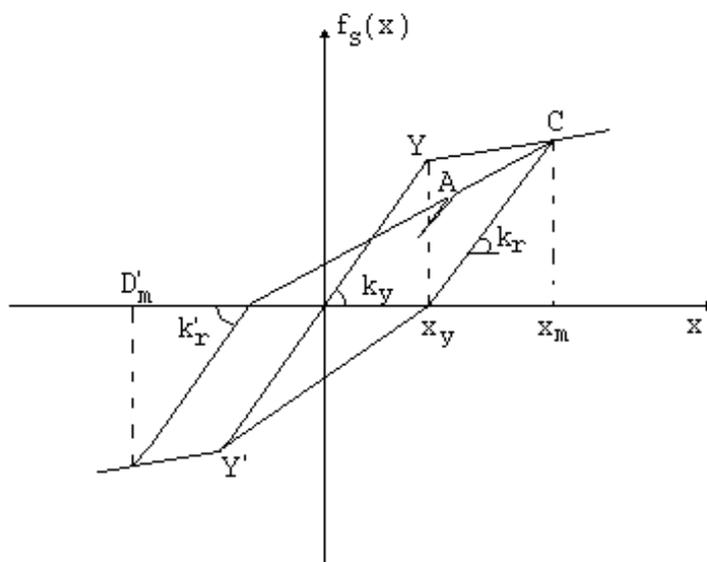


Figura 5.3.3 - Modello isteretico modificato, o di Clough

La rigidezza in fase di scarico  $k_r$ , è espressa dalla relazione

$$k_r = k_y \left| \frac{x_m}{x_y} \right|^{-\alpha} \quad (5.38)$$

essendo  $\alpha$  il parametro assunto per la misura della degradazione della rigidezza di scarico. Nella precedente formula  $k_y$  esprime la rigidezza elastica iniziale;  $x_m$  rappresenta il precedente spostamento massimo ed  $x_y$  indica lo spostamento al limite di snervamento.

#### 5.3.4. Modello di Takeda

I legami tipo "Takeda", bilineari ed a riduzione di rigidezza, con o senza incrudimento, sono molto usati in letteratura per lo studio del comportamento delle strutture in cemento armato.

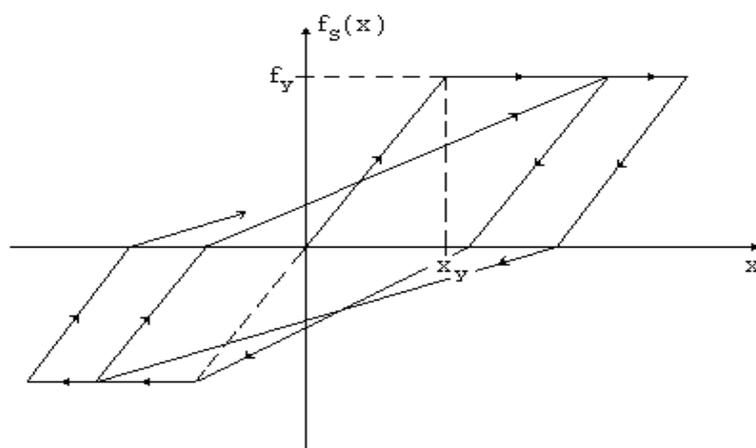


Figura 5.3.4a - Modello di Takeda, (senza incrudimento)

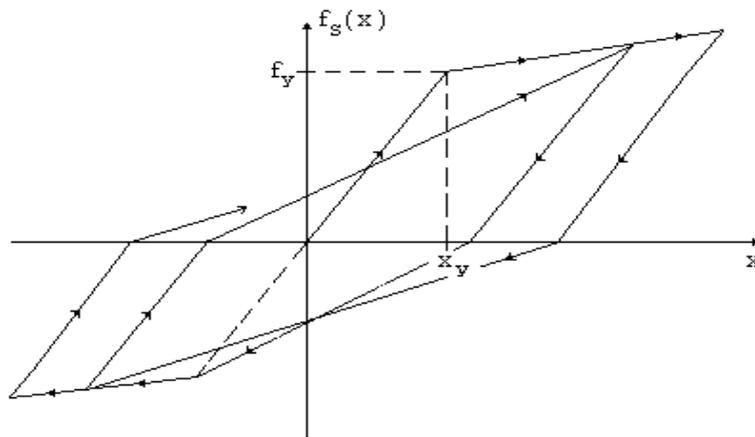


Figura 5.3.4b - Modello di Takeda, (con incrudimento)

La legge analitica della forza di richiamo in termini dello spostamento, nei vari cicli di carico, può essere dedotta facilmente dagli schemi riportati nelle precedenti figure.

### 5.3.5. Modello Q-isteresi

Questo modello può essere considerato come un modello isteretico bilineare, che porta incorporata anche la degradazione della rigidezza durante il caricamento ciclico. Anche qui è immediato determinare la forma della legge che esprime la forza di richiamo.

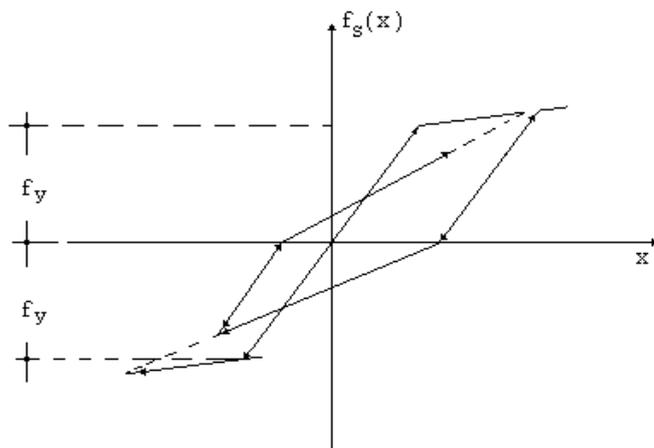


Figura 5.3.5 - Modello Q-isteresi

#### 5.4. Valutazione del danneggiamento strutturale

Nel progetto delle strutture in c.a. soggette ad azioni sismiche la sicurezza contro il collasso strutturale rappresenta l'obiettivo prioritario. Per ragioni economiche, tuttavia, quando la struttura è sottoposta a forti azioni sismiche, si accetta che essa subisca danni tollerabili, che salvaguardino comunque l'incolumità delle persone. La valutazione dei danni sismici è un argomento di notevole interesse nelle ricerche più recenti. Tradizionalmente nel passato è stato usato, come misura del danno strutturale, il rapporto di duttilità cinematica ossia il rapporto tra lo spostamento massimo e lo spostamento al limite di snervamento e cioè

$$\mu = \frac{\delta_{\max}}{\delta_y} \quad (5.39)$$

Sotto le azioni sismiche, gli elementi in cemento armato subiscono danneggiamenti anche per effetto dei ripetuti sforzi ciclici. Le analisi strutturali, pertanto, devono necessariamente includere oltre alla risposta dinamica anelastica anche il

comportamento strutturale isteretico, al fine di poter determinare correttamente l'effettivo danneggiamento che si produce nella struttura sotto un sisma assegnato.

#### 5.4.1. Modello di Y.J. Park, A.H. Ang e Y.K. Wen, [55]

Il danno strutturale di natura sismica negli elementi in cemento armato viene espresso come una combinazione lineare del danno causato da un'eccessiva deformazione e dal contributo dovuto agli effetti del ripetuto carico ciclico. Esso viene rappresentato, secondo Park et al., mediante un "indice di danno",

$$D = \frac{\delta_M}{\delta_u} + \frac{\beta}{Q_y \delta_u} \int dE \quad (5.40)$$

oppure

$$D = \frac{\delta_M}{\delta_u} + \beta \int \left(\frac{\delta}{\delta_u}\right)^\alpha \frac{dE}{E_c(\delta)} \quad (5.41)$$

essendo

$\delta_M$  = massima risposta deformativa sotto un terremoto assegnato;  
 $\delta_u$  = capacità di deformazione ultima sotto un carico monotono;  
 $Q_y$  = resistenza allo snervamento;  
 $E_c(\delta)$  = energia isteretica per ciclo alla deformazione  $\delta$ ;  
 $\alpha, \beta$  = parametri non negativi da fissare opportunamente;  
 $\delta$  = ampiezza della deformazione ad ogni ciclo di oscillazione;  
 $dE$  = energia isteretica incrementale assorbita nel ciclo generico.

I valori dell'indice di danno,  $D$ , sono tali che per  $D \geq 1.0$  denunciano il collasso o danno della struttura considerata. Il danno strutturale è quindi una funzione della risposta  $\delta_M$  e dell'energia  $dE$ , (entrambi dipendenti dalla storia del carico), oltre che dei parametri  $\alpha, \beta, \delta_u, Q_y$  ed  $E_c(\delta)$  (che identificano alcune capacità meccaniche della struttura esaminata).

Qui di seguito si riportano in dettaglio le procedure occorrenti per la valutazione dell'indice  $D$ .

#### **5.4.1.1. Determinazione di $\delta_u$**

La deformazione ultima può essere assunta, con ottima precisione, in misura pari alla deformazione allo snervamento moltiplicata per il fattore di duttilità e cioè

$$\delta_u = \mu_u \delta_y \quad (5.42)$$

La deformazione allo snervamento  $\delta_y$ , può essere a sua volta

considerata come composta da:

- deformazione flessionale:  $\delta_f$
- deformazione dovuta allo scorrimento:  $\delta_b$
- deformazione anelastica a taglio:  $\delta_s$
- deformazione elastica a taglio:  $\delta_e$

e cioè espressa dalla relazione

$$\delta_y = \delta_f + \delta_b + \delta_s + \delta_e \quad (5.43)$$

#### **5.4.1.2. Valutazione della deformazione elastica a taglio, $\delta_e$**

La deformazione elastica a taglio può essere valutata mediante la teoria convenzionale sulle travi elastiche.

#### **5.4.1.3. Valutazione della deformazione flessionale, $\delta_f$**

Nell'ipotesi che il calcestruzzo compresso rimanga in campo elastico e che lo snervamento si abbia nell'acciaio (fig. 5.4.1.1), la curvatura può esprimersi come segue:

$$\phi'_y = \frac{\varepsilon_y}{(1-k)d} \quad (5.44)$$

essendo

$$k = \left\{ (\rho + \rho')^2 \frac{1}{4\alpha_y^2} + (\rho + \beta_c \rho') \frac{1}{\alpha_y} \right\}^{1/2} - (\rho + \rho') \frac{1}{2\alpha_y}$$

$$\rho = \frac{a_t \sigma_y}{b d f'_c}; \quad \rho' = \frac{a_c \sigma_y}{b d f'_c}; \quad \alpha_y = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_o}; \quad \beta_c = \frac{d_c}{d}$$

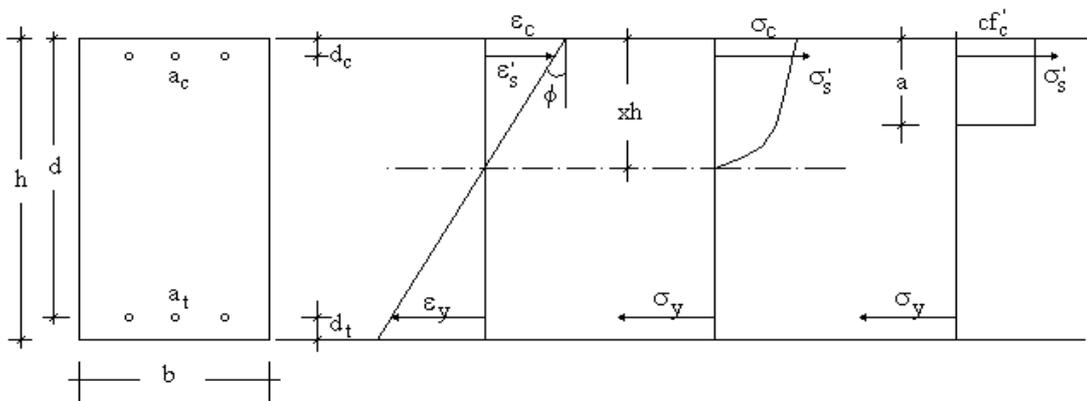


Figura 5.4.1.1 - Sezione trasversale di un tronco elementare di trave/pilastro

Tenendo conto del comportamento anelastico del calcestruzzo e degli effetti provocati dalle forze assiali, poiché l'eq. 5.44 tende a sottostimare la curvatura, è stata proposta la seguente relazione basata sui risultati di un'analisi sperimentale (Aoyama, 1964)

$$\phi_y = \left[ C_1 + (C_2 - C_1) \frac{n_0}{0.3} \right] \phi'_y \quad (5.45)$$

essendo

$$C_1 = \begin{cases} 1.05 & \text{per } p' \neq 0 \\ 1 + 1.9\rho^{2/4} & \text{per } p' = 0 \end{cases} \quad C_2 = 1 + \frac{0.45}{0.84 + 2\rho' - \rho} \quad n_0 = \frac{N}{bdf'_c}$$

Quando la deformazione nella fibra estrema della sezione  $\epsilon_c$  è maggiore di  $1.5\epsilon_0$ , si ha la plasticizzazione nel calcestruzzo. In questo caso, la curvatura può esprimersi con la relazione

$$\phi_y = \frac{1.5\epsilon_0}{xh} \quad (5.46)$$

In cui  $x$  può essere determinato mediante l'equazione d'equilibrio alla traslazione. In particolare si osservi che posto:

$$\beta'_c = \frac{h}{d}; \quad \gamma = 1 - \frac{f'_c}{\sigma_y}; \quad \gamma' = \frac{1.5}{\alpha_y} \cdot \frac{1/\beta'_c - x}{x} \quad (5.47)$$

si ha

$$\epsilon_s = \gamma' \epsilon_y \quad (5.48)$$

inoltre, se  $\epsilon_s \leq \epsilon_y$  ossia  $\gamma' \leq 1$ , l'equazione di equilibrio alla traslazione può scriversi

$$0.778\beta'_c x^2 - \left( n_0 - \gamma\rho' - \frac{1.5}{\alpha_y} \right) x - \frac{1.5}{\alpha_y \beta'_c} \rho = 0 \quad (5.49)$$

In questo modo può ricavarsi la posizione dell'asse neutro  $x$ . Se invece si ha anche lo snervamento nell'acciaio, ossia:  $\gamma' > 1$ , allora si ha direttamente:

$$x = \frac{1.286(n_0 + \rho - \gamma\rho')}{\beta'_c} \quad (5.50)$$

Infine, fig.5.4.1.2, risulta:

$$\delta_f = \phi_y \cdot l^2 / 3 \quad (5.51)$$

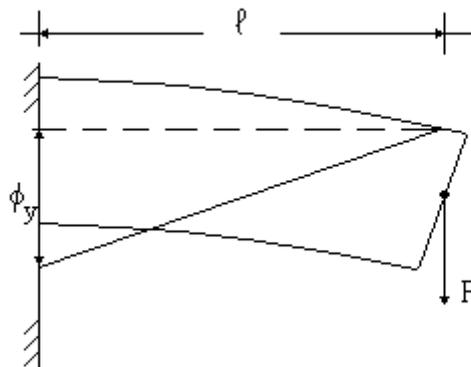


Figura 5.4.1.2 - Componente flessionale della deformazione anelastica allo snervamento

#### 5.4.1.4. Valutazione della deformazione dovuta allo scorrimento,

$\delta_b$

Supponendo trascurabile la deformazione del calcestruzzo nell'ancoraggio, può ricavarsi la seguente relazione costitutiva fra la tensione di aderenza e lo scorrimento:

$$\tau = \frac{AE_s}{\psi} \cdot \frac{d^2S}{dx^2} \quad (5.52)$$

in cui  $A$  e  $\psi$ , rappresentano rispettivamente l'area ed il perimetro delle barre d'acciaio.

Utilizzando la seguente relazione idealizzata tra tensione di aderenza e scorrimento (fig.5.4.1.3):

$$\tau = \frac{AE_s}{\psi} \cdot \frac{d^2s}{dx^2} \quad (5.53)$$

la tensione  $\sigma_0$ , che si ha nella barra può essere espressa come una semplice funzione dello scorrimento normalizzato  $S_n = S/D$  e cioè

$$\sigma_0 = \sqrt{6E_s} \lambda^{1/6} \tau_M^{1/2} S_n^{2/3} \quad (5.54)$$

dove:

$$\lambda = \frac{S_0}{D} \approx 1/40 \quad (5.55)$$

La validità dell'equazione 5.54 è stata accertata attraverso i risultati disponibili di vari esperimenti, (Ferguson,1965; Clark, Koike,1974), pertanto allo scopo di determinare la deformazione dovuta allo scorrimento può assumersi

$$\tau_M = 1.2 \text{ Ksi} = 8.274 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (5.56)$$

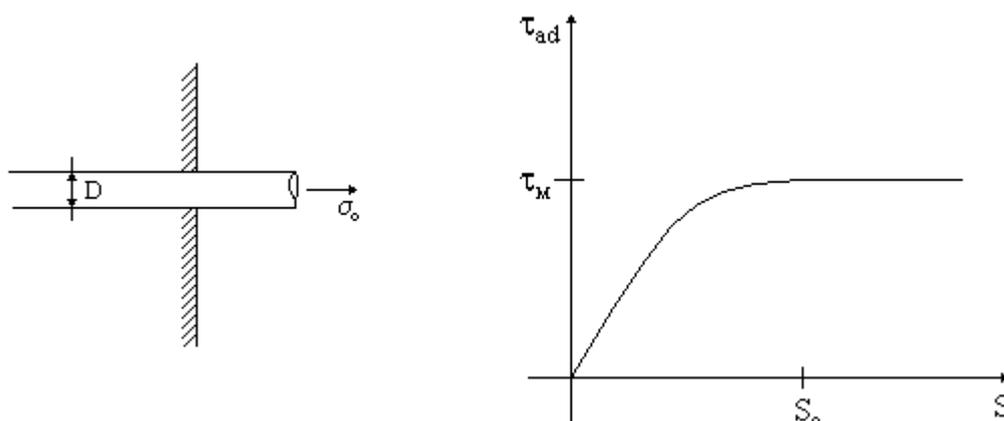


Figura 5.4.1.3 - Legge costitutiva aderenza-scorrimento nell'ancoraggio

Infine, fig. 5.4.1.4, risulta:

$$\delta_b = S \cdot l / z \quad (5.57)$$

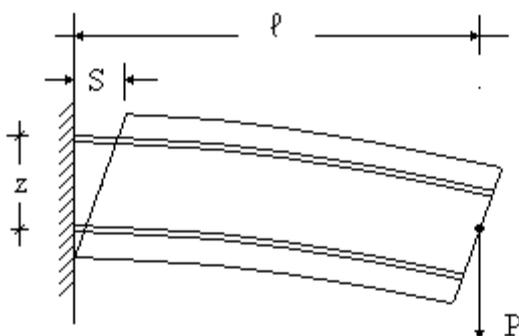


Figura 5.4.1.4 - Componente della deformazione anelastica dovuta allo scorrimento al limite di snervamento

#### 5.4.1.5. Valutazione della deformazione anelastica a taglio, $\delta_s$

Supponendo che le lesioni da taglio siano inclinate a  $45^\circ$ , come mostrato in figura 5.4.1.5, tutte con la stessa angolatura  $\theta_s$ , allora la deformazione a taglio, nel caso di una mensola, può esprimersi nel modo seguente

$$\delta_s = \sum_i l_i \theta_s \quad (5.58)$$

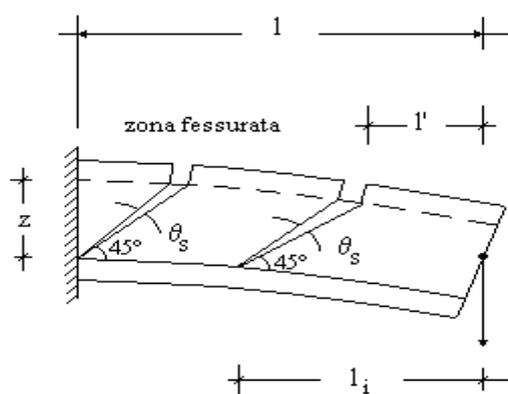


Figura 5.4.1.5 - Componente della deformazione anelastica dovuta al taglio, al limite di snervamento

Supponendo inoltre che le fessure siano tra loro ugualmente spaziate nella zona fessurata ( $l-l'$ ), la deformazione a taglio media può esprimersi mediante la relazione

$$E[\delta_s] = E[\sum l_i] \cdot \theta_s = \left(1 + \frac{l^2 + l'^2}{2Z}\right) \quad (5.59)$$

Usando la precedente equazione, con il conforto dei risultati ottenuti dall'analisi sperimentale, è stata ricavata la seguente espressione per la valutazione della rotazione  $\theta_s$  in travi e pilastri in c.a.

$$\theta_s = \begin{cases} \frac{0.002}{1/d-0.5} & \text{per } u < 5 \text{ o } \frac{1}{d} > 4 \\ \frac{0.002}{1/d-0.5} [1 + 0.27(u - 5)] & \text{per } u < 5 \text{ o } \frac{1}{d} > 4 \\ \frac{0.002}{1/d-0.5} \left( 1 + 0.185 \frac{u-5}{\sqrt{p_w-0.4}} \right) & \text{per } u < 5 \text{ o } \frac{1}{d} > 4 \end{cases} \quad (5.60)$$

Nelle precedenti relazioni  $l/d$  è il rapporto tra la lunghezza e l'altezza della trave (posto pari ad 1.5 se  $l/d < 1.5$ );

$P_w$  è il "rapporto staffe", in percentuale, (posto pari a 0.2% se  $P_w < 0.2\%$ );

$u = \tau_B / \sqrt{f'_c}$ ; quest'ultimo termine viene inserito per tener conto del fatto che la presenza delle staffe può disturbare il meccanismo di crisi e ridurre quindi gli sforzi trasmessi attraverso le barre longitudinali (fig.5.4.1.6). A causa di ciò, l'effettiva tensione di aderenza media risulta pari a

$$\tau_B = \frac{\Delta T}{\psi(1-1.71nd)} \quad (5.61)$$

dove:

$\Delta T$ = differenza tra le forze agenti agli estremi dell'elemento calcolate con l'analisi flessionale;

$\psi$ = perimetro delle barre longitudinali;

$l$ = lunghezza dell'elemento;

$n$ = numero di coppie di staffe;

$d$ = diametro delle staffe.

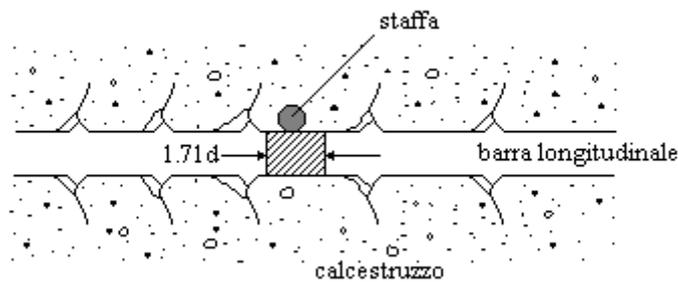


Figura 5.4.1.6 - Meccanismo di crisi nelle zone di contatto fra la barra di armatura ed il conglomerato, dovuto alla presenza delle staffe

#### 5.4.1.6. Determinazione del fattore di duttilità, $\mu_u$

Dagli esperimenti riportati in letteratura su travi e pilastri in c.a., si può desumere che il fattore di duttilità ultimo è altamente correlato con la deformazione flessionale ed a taglio, inoltre esso dipende dal rapporto di confinamento:  $\rho_w$ , (definito come il rapporto volumetrico delle staffe e del nucleo di calcestruzzo). Basandosi su queste osservazioni è stata proposta la seguente relazione per determinare il fattore di duttilità ultimo

$$\mu_u = \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0}\right)^{0.218\rho_w-2.15} \exp(0.654\rho_w + 0.38) \quad (5.62)$$

nella precedente  $\rho_w$  è espresso in percentuale e deve porsi pari al 2% se risulta  $\rho_w > 2\%$ ; e  $\mu_u$  deve porsi pari ad 1 se risulta  $\mu_u < 1.0$ ; inoltre  $\varepsilon_p$  è la massima deformazione principale, pari a

$$\varepsilon_p = 0.5\varepsilon_b + 0.5\sqrt{\varepsilon_b^2 + \theta_s^2} \quad (5.63)$$

dove  $\epsilon_b$  è la deformazione del calcestruzzo in corrispondenza delle barre compresse, calcolata usando l'equazione (5.45); mentre  $\theta_s$  è la rotazione data dalla (5.60).

#### 5.4.1.7. Determinazione di $\beta$

Gli effetti dei carichi ciclici sul danno strutturale sono misurati dal parametro  $\beta$ . Tale valore può essere determinato, attraverso le equazioni 5.40 e 5.41, effettuando esperimenti su una serie di elementi in c.a. considerati nell'istante di crisi ( $D=1.0$ ). E' stata così osservata una correlazione negativa tra il valore di  $\beta$  ed il rapporto di confinamento  $\rho_w$ , ed una correlazione positiva sia con il rapporto  $l/d$ , che con il rapporto di armatura longitudinale e con lo sforzo assiale  $n_0$ . Da tali analisi sono state ricavate per  $\beta$ , (con  $\alpha=1$ ), le seguenti espressioni

per l'eq. 5.4.1.1 
$$\beta = (-0.447 + 0.73l/d + 0.24n_0 + 0.314p_t)0.7^{\rho_w} \quad (5.64)$$

per l'eq. 5.4.1.2 
$$\beta = (-0.165 + 0.315l/d + 0.131p_t)0.84^{\rho_w} \quad (5.65)$$

in cui:

- $l/d$  è il rapporto tra la lunghezza e l'altezza dell'elemento (posto pari a 1.7 se  $l/d < 1.7$ );
- $n_o$  è lo sforzo assiale normalizzato (posto pari a 0.2 se  $n_o < 0.2$ );
- $p_t$  è il rapporto armatura longitudinale, in percentuale (posto pari a 0.75% se  $p_t < 0.75\%$ );
- $\rho_w$  è il rapporto di confinamento in percentuale.

#### **5.4.1.8. Determinazione di $Q_u$**

La resistenza massima in travi e pilastri in c.a. soggetti a carichi ciclici può essere determinata mediante la seguente relazione, fondata sulle risultanze di analisi sperimentali

$$Q_u = (1.24 - 0.15\rho - 0.5n_o)Q_y \quad (5.66)$$

#### **5.4.1.9. Determinazione di $E_C(\delta)$**

$E_C(\delta)$  è l'energia isteretica per ciclo alla deformazione  $\delta$ . Sulla base di risultanze sperimentali, è stato ricavato che l'energia isteretica è legata al fattore di duttilità  $\mu$ , attraverso una

relazione che può essere approssimata ad una curva bilineare (cfr.

fig. 5.4.1.7) e cioè

$$E_c(\mu) = \begin{cases} Q_y \delta_y (0.77\mu - 0.22) & \text{per } \mu < 1.5 \\ Q_y \delta_y [f_1(\mu - 1) + f_2] & \text{per } \mu \geq 1.5 \end{cases} \quad (5.67)$$

Si osserva che i parametri  $f_1$  ed  $f_2$ , dipendono dal rapporto tra la deformazione flessionale  $\delta_f$  e la deformazione totale allo snervamento

$\delta_y$ . Per tali indici Park ed al., [55], propongono di assumere i

seguenti valori

$$f_1 = 0.5 + 2.34 \frac{\delta_f}{\delta_y}; \quad f_2 = 0.7 + 1.54 \frac{\delta_f}{\delta_y} \quad (5.68)$$

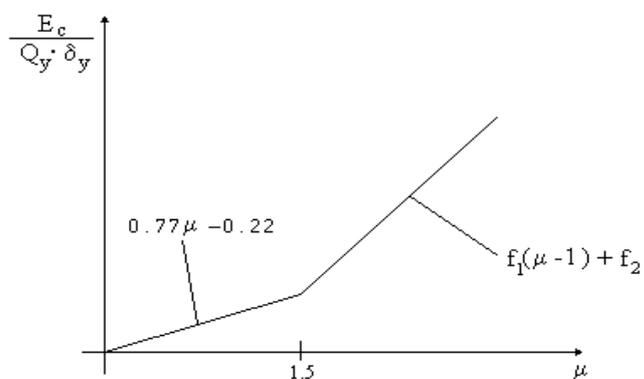


Figura 5.4.1.7 - Diagramma dell'energia isteretica normalizzata

#### 5.4.2. Modello di S.L. Roufaiel e C. Meyer, [22]

L'indice di danno proposto da Roufaiel e Meyer per un tronco elementare di trave/pilastro, [22], è definito come il rapporto tra la rigidezza secante del tronco valutata all'istante della crisi e la sua rigidezza secante all'istante considerato . In particolare, tenendo conto della direzione del carico, e nell'ipotesi che la relazione momento-curvatura sia quella riportata in figura 5.4.2.1, l'indice di danno può esprimersi mediante la relazione

$$\text{MFDR} = \max[\text{MFDR}^+; \text{MFDR}^-] \quad (5.69)$$

essendo

$$\text{MFDR}^+ = \frac{\frac{\phi^+}{M^+} - \frac{\phi_y^+}{M_y^+}}{\frac{\phi_m^+}{M_m^+} - \frac{\phi_y^+}{M_y^+}}; \quad \text{MFDR}^- = \frac{\frac{\phi^-}{M^-} - \frac{\phi_y^-}{M_y^-}}{\frac{\phi_m^-}{M_m^-} - \frac{\phi_y^-}{M_y^-}} \quad (5.70)$$

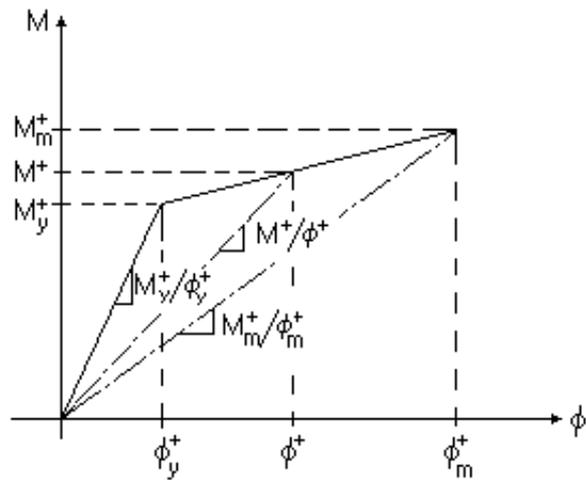


Figura 5.4.2.1 - Legame momento-curvatura per un tronco elementare di trave/pilastro

Per la determinazione del legame  $M-\phi$  sono state assunte le leggi costitutive dell'acciaio e del calcestruzzo riportate in figura 5.4.2.2 e 5.4.2.3. In particolare, per l'acciaio il legame tensioni-deformazioni viene idealizzato mediante una curva bilineare, mentre per il calcestruzzo è stata usata l'approssimazione trilineare avente le seguenti caratteristiche:

1. La resistenza ultima del calcestruzzo  $f_{cu}$  e l'associata deformazione  $\epsilon_{cu}$  sono funzioni della resistenza cilindrica monoassiale  $f'_c$  e della quantità  $\rho''$  che mette in conto il "confinamento" sul calcestruzzo esercitato dalle staffe, e cioè

$$\begin{aligned} f_{cu} &= (1 - 10\rho'')f'_c \\ \varepsilon_{cu} &= (1 + 10\rho'')\varepsilon_0 \end{aligned} \quad (5.71)$$

essendo

$$\rho'' = \frac{2(b''+d'')A''_s}{b''d''s} \quad (5.72)$$

Nella precedente relazione i parametri  $b''$  e  $d''$  esprimono rispettivamente la base e l'altezza del nucleo di conglomerato,  $A''_s$  è l'area della sezione trasversale che circonda il nucleo stesso ed  $s$  è lo spessore che circonda il nucleo all'esterno (copriferro).

2. Il ramo di carico è rappresentato da una curva bilineare tale che l'area da essa sottesa risulti la stessa dell'area sottesa dalla parabola di Park, (1972). La pendenza della prima linea del diagramma è pari alla pendenza iniziale della parabola e cioè

$$f_{cy} = \frac{2}{3}f_{cu}; \quad \varepsilon_{cy} = \frac{2}{3}\varepsilon_{cu} \quad (5.73)$$

mentre la pendenza del secondo segmento si ottiene immediatamente per ispezione del diagramma stesso.

3. Le coordinate del punto finale del ramo di scarico sono ricavate empiricamente come appresso

$$f_c = 0.21f_{cu}; \quad \varepsilon_m = (2 + 600\rho'')\varepsilon_{cu} \quad (5.74)$$

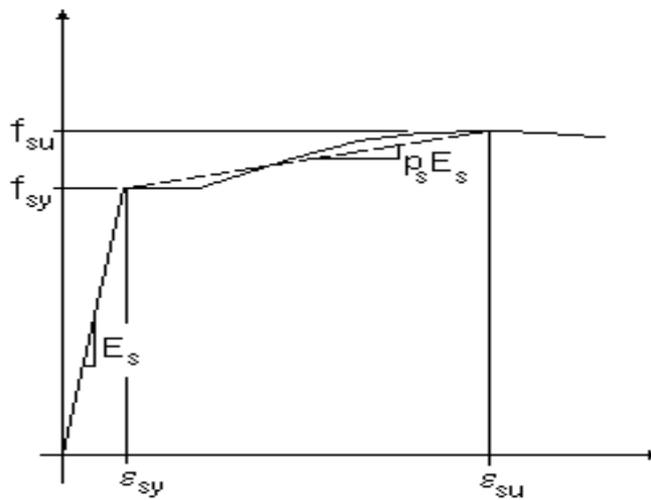


Figura 5.4.2.2 - Legame costitutivo dell'acciaio

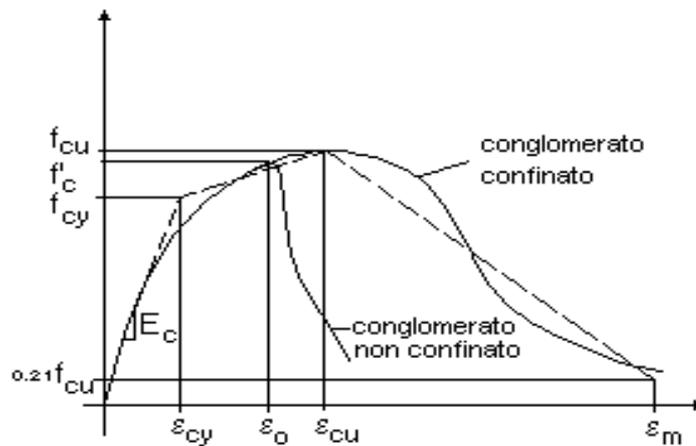


Figura 5.4.2.3 - Legame costitutivo per il calcestruzzo

Le risultanze sperimentali hanno mostrato che gli elementi in calcestruzzo, dopo esser stati soggetti alla deformazione ultima  $\epsilon_m$  nella fibra maggiormente compressa, iniziano a degradarsi nel successivo ciclo di carico (Roufaiel e Meyer 1983). La deformazione  $\epsilon_m$  può essere assunta per individuare l'inizio della crisi, in quanto in realtà gli elementi potranno affrontare solo pochi cicli di carico, tutti di ampiezza decrescente, dopo che è stato raggiunto il predetto valore critico  $\epsilon_m$ .

### 5.4.3 Modello di E. Cosenza e G. Manfredi, [54]

E. Cosenza e G. Manfredi, [54], propongono di determinare il danneggiamento di un tronco di trave/pilastro in c.a. attraverso la generalizzazione della legge dell'accumulo lineare della fatica plastica. Nel caso sismico ciò può essere espresso mediante la relazione

$$D_F = A \cdot \sum_{i=1}^n (\bar{\delta}_i)^b \quad (5.75)$$

essendo A e b due parametri occorrenti per la definizione del modello,  $\bar{\delta}_i$ , esprime l'escursione plastica del generico ciclo, ed n è il numero complessivo di escursioni plastiche maturate sino all'istante considerato. Anche in questo caso, un valore nullo per l'indice  $D_F$  mostra l'assenza di danno, mentre il raggiungimento del valore unitario significa il collasso raggiunto sotto azioni cicliche.

I parametri A e b hanno un preciso significato fisico che può essere chiarito come segue. Se si raggiunge il collasso con un unico

ciclo, caratterizzato dalla escursione plastica:  $\bar{\delta}_{1,u}$ , allora dalla 5.75, per  $n=1$  e  $D_F=1$  si ha

$$1 = A \cdot (\bar{\delta}_{1,u})^b \quad (5.76)$$

per cui risulta

$$A = \frac{1}{(\bar{\delta}_{1,u})^b} \quad (5.77)$$

La 5.75 può dunque porsi in questo caso nella forma

$$D_F = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_{1,u}} \right)^b \quad (5.78)$$

che mette in evidenza come i parametri necessari per la definizione del modello sono proprio  $\bar{\delta}_{1,u}$  e  $b$ . Di essi il primo è associato alla risposta strutturale per un unico ciclo, ovvero è completamente indipendente dal comportamento ciclico susseguente dell'elemento. In conseguenza il "danneggiamento ciclico" dell'elemento resta unicamente definito dall'altro parametro e cioè da  $b$ . Detti parametri possono essere determinati effettuando adeguate prove sperimentali, osservando che se si porta a rottura l'elemento in esame

sottoponendolo ad escursioni plastiche di ampiezza costante  $\bar{\delta}$ , dalla 5.75 si ha

$$1 = AN(\delta)^b \quad (5.79)$$

essendo  $N$  il numero di cicli sino alla rottura. Dalla precedente, passando ai logaritmi, si ottiene

$$\log(A) + \log(N) + b \cdot \log(\delta) = 0 \quad (5.80)$$

La relazione ora trovata, nel piano  $\log(N) - \log(b)$ , rappresenta l'equazione di una retta di coefficiente angolare  $-\frac{1}{b}$  che interseca l'asse  $\log(N)$  nel punto  $-\log(A)$ . In letteratura i valori di  $b$  sono stati ricavati su base sperimentale da Yamada (1990), [54], e variano da 1.3 a 6 a seconda delle proprietà dei materiali utilizzati (acciaio e calcestruzzo). Inoltre, a sostegno del modello, gli Autori riportano un confronto tra i risultati ottenuti con il suddetto metodo, utilizzando sia il modello nonlineare elasto-plastico che quello dissipativo di Clough-Johnston, ed ipotizzano che l'escursione complessiva per cui la struttura perviene al collasso in un unico

ciclo sia pari a 4 volte lo spostamento al limite di comportamento elastico.

Si osservi inoltre che se nella 5.78, si assegnano al parametro  $b$  valori molto alti, allora le escursioni di piccola entità assumono un'importanza minore nell'ottica del collasso ed il collasso medesimo si ha unicamente in dipendenza dell'escursione di maggior ampiezza, con ciò si ricade nel caso di collasso per eccesso di duttilità; viceversa se si pone  $b=1$ , allora si dà lo stesso peso a ciascuna escursione plastica, ed in conseguenza il danno si cumula ad ogni ciclo indipendentemente dalla sua entità, per cui si ricade nel caso in cui il parametro che regola il collasso ciclico diventa quello che misura l'energia dissipata. Da ciò si può desumere come il metodo sia tale da poter essere considerato sufficientemente generale, infatti per particolari valori dei parametri che lo distinguono si possono ottenere i casi più semplici.

## **6. Programma di calcolo DADRA e guida d'uso**

Come già detto precedentemente, il metodo di integrazione diretta od al passo delle equazioni del moto per l'analisi nonlineare delle strutture in c.a. viene di norma utilizzato soltanto per risolvere particolari problemi scientifici a causa del notevole sforzo computazionale richiesto da tale tipo di approccio. Nel caso in cui poi si intende provvedere anche alla generazione degli accelerogrammi artificiali, allora l'analisi dinamica al passo, per ognuno degli accelerogrammi generati artificialmente, permette di effettuare la valutazione delle grandezze statistiche di specifico interesse.

In questo lavoro è stato messo a punto un programma di calcolo automatico, in ambiente MS-DOS e per PC, che consente di effettuare tali analisi in tempi relativamente brevi. Questo programma è stato formulato sulla scorta del codice di calcolo "DRAIN-2D: General purpose computer program for dynamic analysis of inelastic plane

structures", di A. E. Kanaan e G. H. Powell. Tale programma chiamato DADRA, permette di mettere in conto sia la natura aleatoria delle azioni che i complessi meccanismi di danneggiamento che si producono nelle strutture in c.a. sotto azioni dinamiche. Il programma predetto può comunque essere utilizzato anche nella sua versione originale, (Drain-2D), nel caso in cui si desidera effettuare un'analisi di tipo deterministico.

#### **6.1. Modifiche introdotte al codice Drain-2D**

Il programma Drain-2D, (1973), [33], nella sua versione originale, consente di effettuare l'analisi della risposta dinamica di strutture piane in regime nonlineare. In particolare l'analisi viene condotta mediante una procedura di integrazione al passo, utilizzando il metodo cosiddetto dell'accelerazione costante. Il codice comprende altresì alcune subroutine per la modellazione di vari elementi strutturali, quali la trave/colonna in acciaio ed in c.a., le aste per le travature reticolari, i pannelli e gli elementi

vincolati nei nodi con connessioni semi-rigide. Il Drain-2D offre inoltre la possibilità all'utente di arricchire a suo piacimento il programma di base, introducendo nuove subroutine per l'analisi di elementi strutturali di vario tipo.

Nella versione più aggiornata del suddetto codice, (1975), è stata introdotta la subroutine per l'asta elementare caratterizzata da comportamento inelastico, (eleme6), utile per l'analisi non lineare delle strutture in cemento armato, in cui abbia luogo il fenomeno della degradazione della rigidezza sotto azioni alterne e/o cicliche.

Il programma, così com'è nato, consente di effettuare soltanto un'analisi per ogni "run", sulla base dei dati forniti relativamente alla struttura, ed alla legge dell'accelerazione sismica.

Le principali modifiche ed aggiunte che sono state inserite nel Drain-2D allo scopo di raggiungere gli obiettivi del presente lavoro, possono riassumersi brevemente come appresso.

1. La storia nel tempo dell'accelerazione sismica può essere specificata direttamente dall'utente, onde effettuare un'analisi di tipo deterministico. In questo caso il programma funziona così come il Drain originale. Oppure, in alternativa, la legge che descrive l'accelerazione sismica può essere ottenuta per generazione artificiale, sulla base di quanto già discusso in precedenza, relativamente alla modellazione stocastica dell'eccitazione sismica, (cap. 4).

2. Ad ogni passo dell'integrazione, nel corso dell'analisi dinamica, vengono determinati gli indici di danno, secondo i vari modelli prima selezionati, (Roufaiel e Meyer, Park ed Ang, Cosenza e Manfredi). Tali indici vengono calcolati per entrambi i tronchi terminali di ciascun elemento trave/pilastro della struttura esaminata.

3. La struttura nel suo complesso può essere sottoposta ad un numero qualsivoglia di terremoti artificiali, e, in questo caso, il

programma valuta il valor medio e la deviazione standard per tutti gli indici di danno preliminarmente selezionati e per ciascuno degli elementi trave/pilastro che compongono la struttura assegnata.

## **6.2 Generazione degli accelerogrammi artificiali**

La storia nel tempo dell'accelerazione sismica può essere ottenuta artificialmente, sulla base di quanto già detto nel capitolo 4, mediante il prodotto di una funzione involuppo esponenziale per un processo stazionario gaussiano e cioè

$$\ddot{x}_g(t) = s(t) \cdot g(t) \quad (6.1)$$

A tal fine, il programma, consente di inserire da tastiera i valori dei vari parametri necessari e precisamente:

- 1) Numero di accelerogrammi da generare artificialmente ( $n_{ter}$ );
- 2) Valore di picco dell'accelerazione ( $p_{ga}$ );
- 3) Intervallo di tempo agli estremi del quale calcolare l'accelerazione ( $dt$ );
- 4) Numero di intervalli ( $n_{dt}$ ). Si tenga presente in proposito che  $t_f = n_{dt} * dt$ , essendo  $t_f$  la durata totale del sisma;
- 5) Frequenza massima cut-off ( $\omega_u$ ), si vedano in merito le figure 6.2.1 e 6.2.2 in cui sono riportati ad es. due accelerogrammi artificiali con diversi valori della frequenza cut-off;
- 6) Coefficiente di smorzamento predominante ( $\xi_g$ ) e frequenza caratteristica della terra ( $\omega_g$ ). Tali valori, (detti anche "coefficienti filtro"), dipendono dalle caratteristiche del sito. Ad es. per un terreno roccioso sono stati proposti da Kanai-Tajimi i seguenti valori  $\xi_g = 0.6$ ,  $\omega_g = 15.6$ ;
- 7) Coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  della funzione inviluppo. Si veda in proposito la fig. 4.1, in cui si mostra la natura dei suddetti parametri.

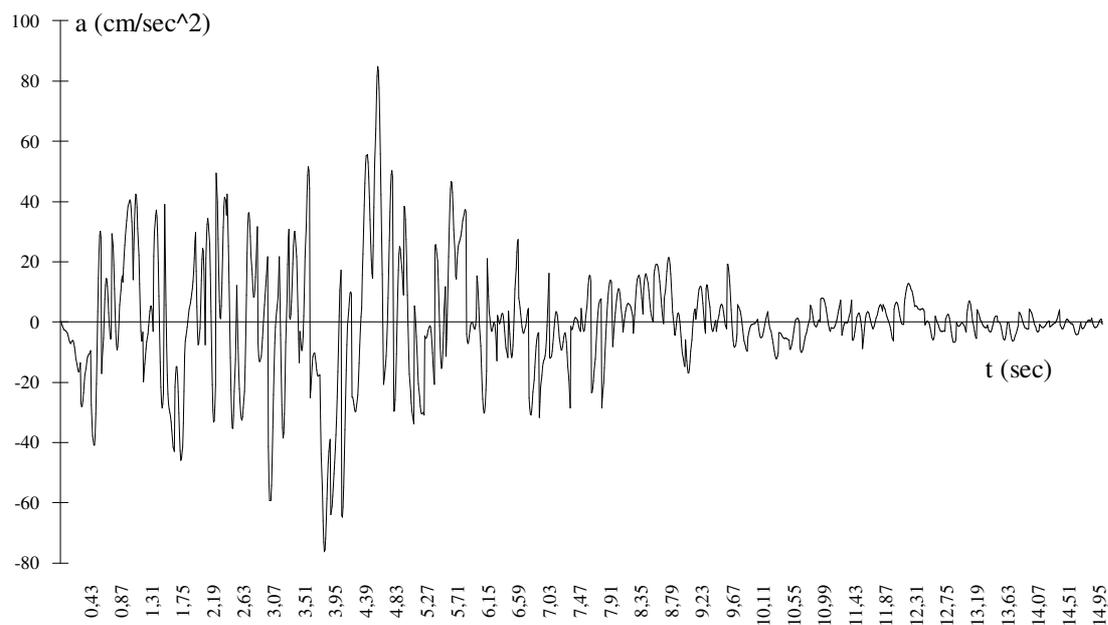


Figura 6.2.1 - Accelerogramma artificiale. Frequenza cut-off:  $\omega_u=50$

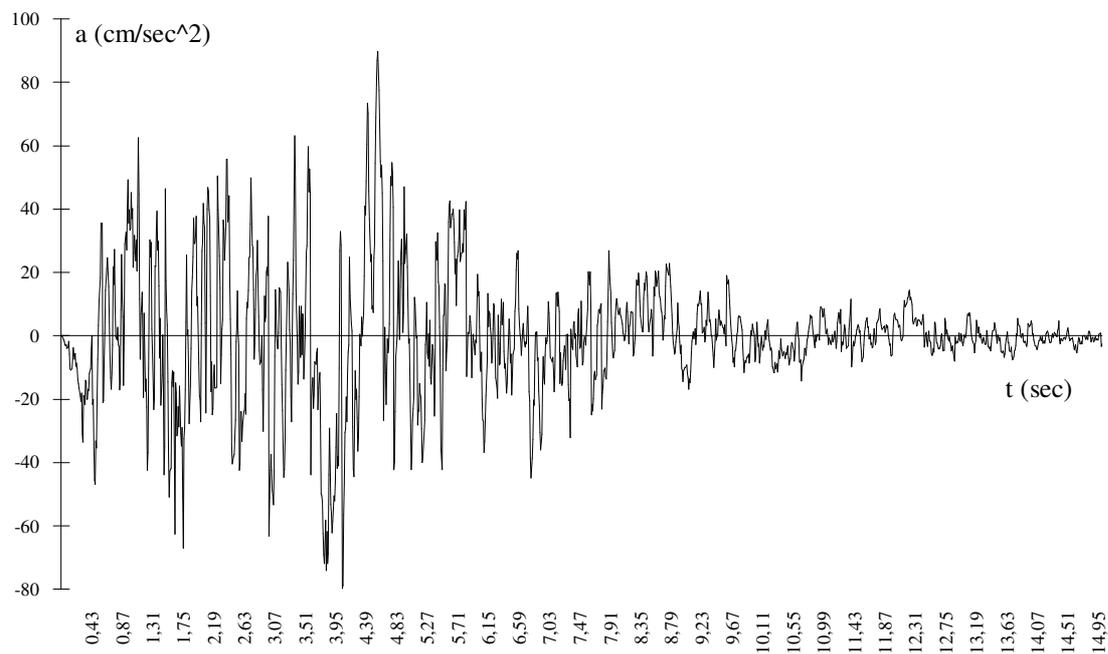


Figura 6.2.2 - Accelerogramma artificiale. Frequenza cut-off:  $\omega_u=300$

### 6.3 Valutazione del danneggiamento meccanico negli elementi di trave/pilastro in c.a. soggetti ad azioni cicliche

Gli elementi in c.a. soggetti a carichi ciclici rivelano una degradazione delle loro proprietà in termini di rigidezza flessionale. Nel codice Drain-2D gli elementi trave/pilastro vengono modellati come elementi elastico-lineari per tutta la loro lunghezza, con l'aggiunta, agli estremi, di due molle rotazionali aventi

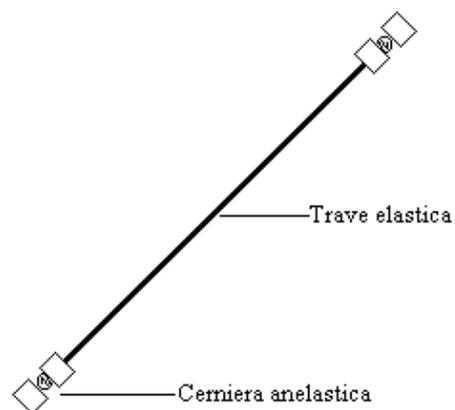


Figura 6.3.1 - Idealizzazione dell'elemento.

comportamento non lineare, (fig. 6.3.1). Tutti gli effetti della deformazione plastica, inclusi quelli associati al degrado meccanico della rigidezza, vengono pertanto introdotti nel modello per mezzo

della relazione momento-rotazione che attiene alle suddette cerniere.

Tale relazione può essere vista come una versione più estesa del modello di Takeda, che ha il comportamento illustrato in figura 6.3.2.

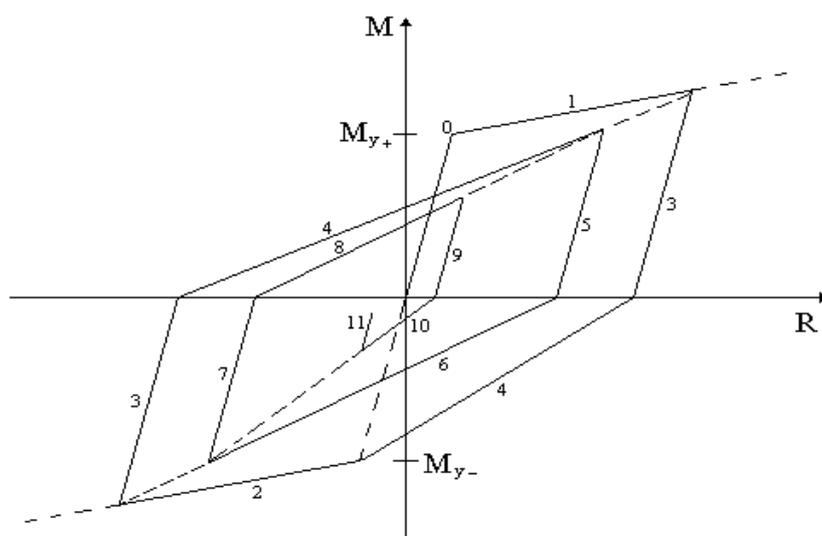


Figura 6.3.2 - Relazione momento-rotazione assunta per determinare la forza di richiamo in corrispondenza delle cerniere. Modello di Takeda.

La relazione di base è stata assunta nella forma di una curva bilineare, con una rigidezza iniziale e un susseguente stadio di incrudimento, e cioè nella forma peculiare associata con il caricamento monotono. Il degrado della rigidezza nelle molle poste nelle cerniere di estremo, si mette in conto al momento in cui vengono

applicati carichi ciclici. Se il momento flettente nello sviluppo dell'elemento è costante, e se l'elemento stesso ha resistenza uniforme, allora la relazione momento-rotazione ha la stessa forma della relazione momento-curvatura (fig.6.3.3), in quanto, in questo caso, la curvatura e la rotazione sono tra loro direttamente proporzionali.

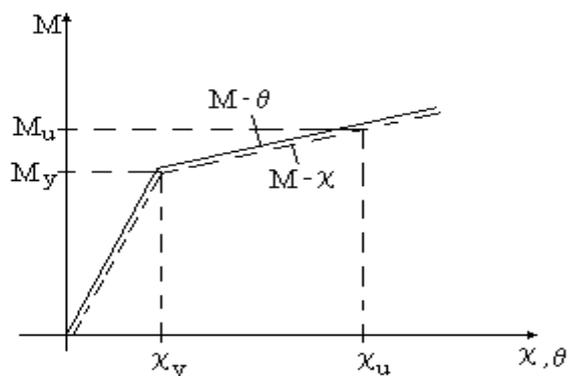


Figura 6.3.3 - Relazioni momento-curvatura e momento-rotazione

Nel codice di calcolo DADRA qui proposto, ogni trave viene suddivisa in tronchi od elementi di ampiezza finita, così come indicato in figura 6.3.4, cosicchè la variazione del momento flettente nell'ambito del tronco si può ritenere sufficientemente piccola. Pertanto ogni elemento terminale, nel quale il materiale ha raggiunto

la soglia di plasticità, può considerarsi soggetto ad un momento costante. In considerazione di ciò, può ragionevolmente assumersi che la relazione momento-rotazione abbia la stessa forma della relazione momento-curvatura.

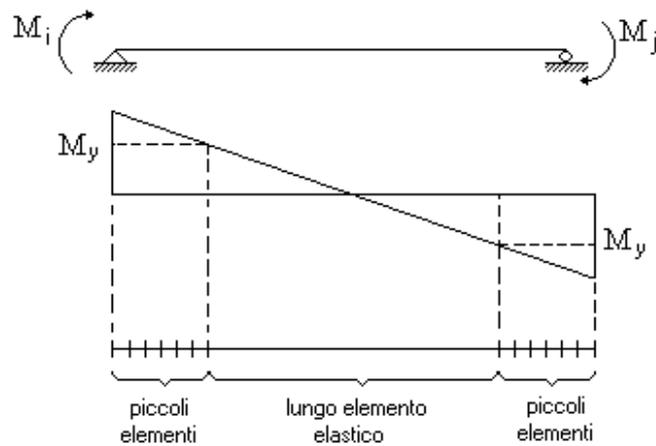


Figura 6.3.4 - Suddivisione dell'elemento di trave/pilastro in piccoli tronchi

La valutazione del danneggiamento può essere perseguita usando i modelli descritti precedentemente, tenendo pure conto delle ipotesi poste alla base del Drain-2D per la modellazione degli elementi in cemento armato.

### 6.3.1. Modello di Park, Ang e Wen, [55]

Secondo Park ed altri, [55], l'indice di danneggiamento può essere determinato mediante la relazione 5.40. Tale relazione, con le ipotesi fatte, può scriversi nella forma

$$D = \frac{\theta_M}{\theta_u} + \frac{\beta}{M_y \theta_u} \int dE \quad (6.2)$$

in cui:

$\theta_M$  = rotazione massima sotto il carico sismico

$\theta_u$  = rotazione ultima sotto un carico monotónico

$\beta$  = parametro non negativo, determinabile tramite la 5.64

$\int dE$  = energia isteretica assorbita.

### 6.3.2. Modello di Roufaiel e Meyer, [22]

Secondo gli Autori sopracitati, l'indice di danneggiamento può essere valutato mediante la relazione (5.69), che, con le ipotesi fatte, può scriversi nella forma

$$D = \max[D^+, D^-] = \max \left[ \frac{\frac{\theta^+}{M^+} - \frac{\theta_y^+}{M_y^+}}{\frac{\theta_u^+}{M_u^+} - \frac{\theta_y^+}{M_y^+}}, \frac{\frac{\theta^-}{M^-} - \frac{\theta_y^-}{M_y^-}}{\frac{\theta_u^-}{M_u^-} - \frac{\theta_y^-}{M_y^-}} \right] \quad (6.3)$$

con ovvio significato dei simboli.

### 6.3.3. Modello di E. Cosenza e G. Manfredi, [54]

L'indice di danneggiamento secondo il modello di E. Cosenza e G. Manfredi, può essere ottenuto mediante la 5.78, che, con le ipotesi fatte, da luogo alla relazione seguente

$$D_F = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\bar{\theta}_i}{\bar{\theta}_{1,u}} \right)^b \quad (6.4)$$

Se si considera altresì, (cfr. fig. 6.3.5), che

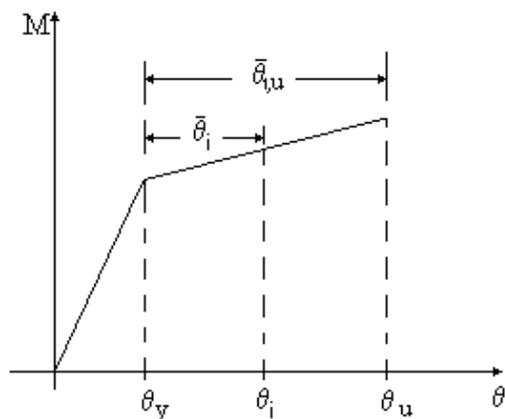
$$\bar{\theta}_i = \theta_i - \theta_y; \quad \bar{\theta}_{1,u} = \theta_u - \theta_y \quad (6.5)$$

e quindi che

$$\frac{\bar{\theta}_i}{\bar{\theta}_{1,u}} = \frac{\theta_i - \theta_y}{\theta_u - \theta_y} = \frac{\frac{\theta_i}{\theta_y} - 1}{\frac{\theta_u}{\theta_y} - 1} = \frac{\mu_i - 1}{\mu_u - 1} \quad (6.6)$$

allora la (6.4) può mettersi nella forma

$$D_F = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mu_i - 1}{\mu_u + 1} \right)^b \quad (6.7)$$



$\bar{\theta}_{1,u}$  = escursione plastica che conduce a rottura l'elemento con un unico ciclo.

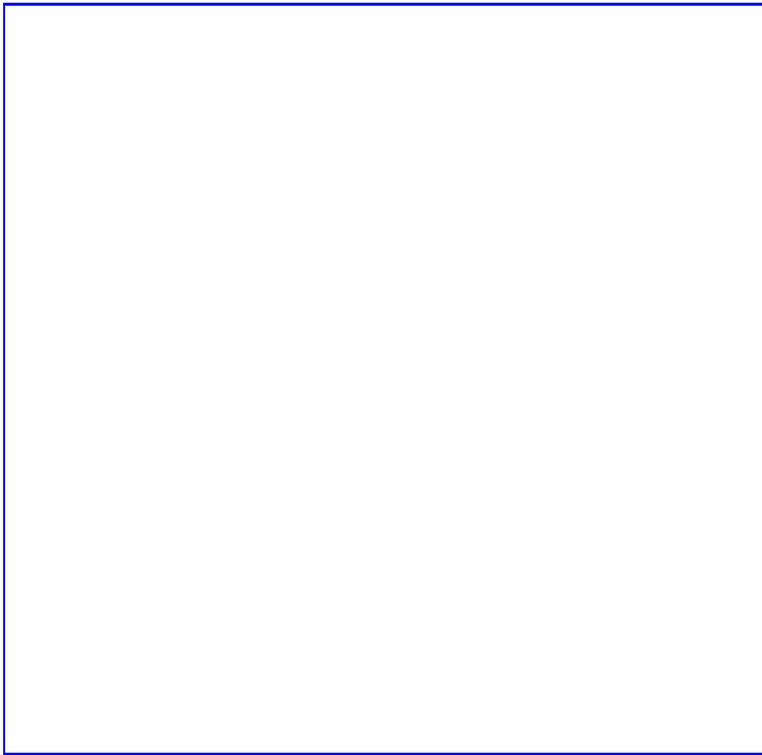
$\bar{\theta}_i$  = escursione plastica nel generico ciclo.

Figura 6.3.5 - Relazione momento-rotazione per un tronco elementare di trave/pilastro

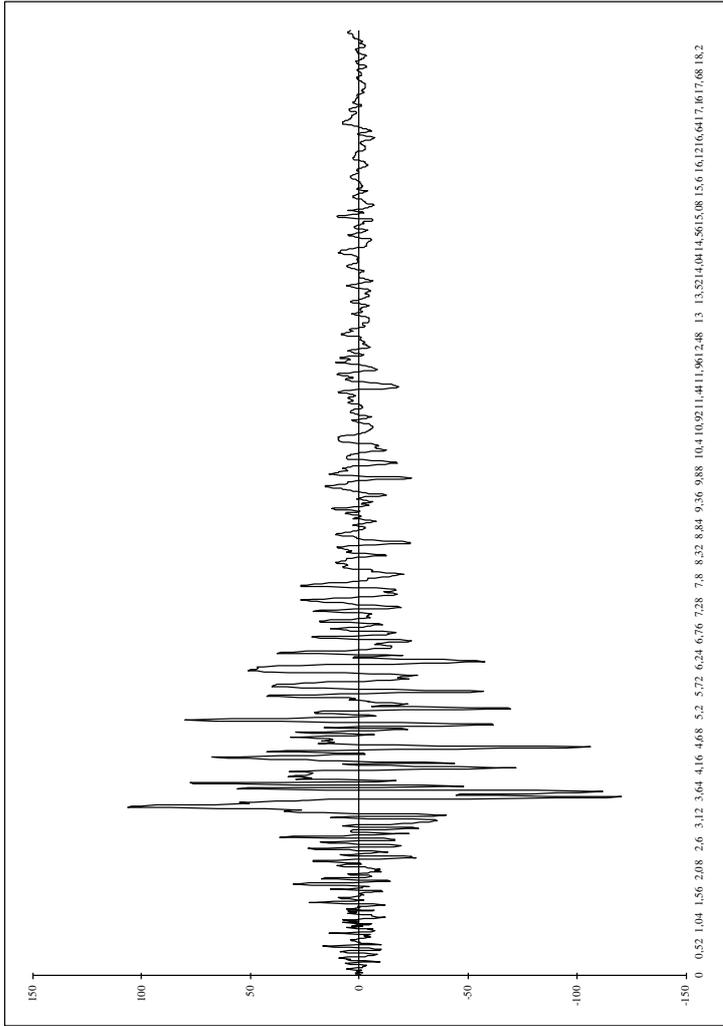


Il codice può essere facilmente installato su PC con processore 486. Per lanciare il programma è necessario innanzitutto ricopiare i dischetti contenenti sia il nuovo "main", che il Drain modificato, nonché le registrazioni sismiche degli accelerogrammi a disposizione. In una directory dell'HDD, può essere inserito anche il compilatore Fortran per le eventuali modifiche che si volessero apportare al programma stesso. Successivamente, mediante un editor di testo si scrive il file di nome "data" in cui vanno inseriti i parametri di pertinenza della struttura, (numero di nodi, numero degli elementi, coordinate dei nodi, ecc.), nonché quelli relativi alle azioni, (sia i carichi statici che quelli dinamici). Inoltre dovranno essere stabiliti i dati relativi alle proprietà meccaniche degli elementi, (rigidezza flessionale, rigidezza assiale, resistenza allo snervamento, resistenza ultima, caratteristiche meccaniche cerniere plastiche, ecc.). A tale scopo è stata qui di seguito predisposta una tabella che, una volta compilata, consente di scrivere più facilmente

il file "data". In particolare, in tale tabella sono riportati i dati relativi al telaio in c.a. a cinque piani e due campate di cui all'esempio n.3 del presente studio. Una descrizione più dettagliata dei parametri richiesti dal programma è riportata nell'appendice A del manuale d'uso del Drain. Si tenga presente che nella scheda C3(a) col. 1-5 del programma DADRA, bisogna inserire il valore "-2" se l'accelerogramma è scelto tra quelli già disponibili nel programma oppure il valore "-1" se uno o più accelerogrammi dovranno essere generati artificialmente. Inoltre, per le strutture in cemento armato, onde poter effettuare anche il calcolo degli indici di danneggiamento, occorre che nella scheda E6(d) vengano inseriti i valori del momento ultimo, della curvatura ultima, del coefficiente  $b$  di Manfredi, [54] e del coefficiente  $\beta$  di Park, [55].



disegno struttura



accelelogramma

INIZIO DEL PROBLEMA E TITOLO		ESEMPIO 3.2 - ANALISI PROBABILISTICA									
col. 1-5 scrivere START	col. 6 - 8 vuote	colonne 9-80 scrivere titolo del problema									
<b>A</b>											
INFORMAZIONI SULLA GEOMETRIA DELLA STRUTTURA : (INFORMAZIONI DI CONTROLLO)											
col. 1-5 n° dei nodi della struttura	col. 6-10 n° di nodi di controllo per cui le coordinate sono specificate distintamente.	col. 11-15 n° di comandi per generare le coordinate dei nodi.	col. 16-20 specificare i nodi con spostamento nullo.	col. 21-25 n° di comandi per specificare i nodi con spostamenti identici.	col. 26-30 n° di comandi per specificare le masse concentrate ai nodi.	col. 31-35 n° di differenti gruppi di elementi nella struttura.	col. 39-40 codice di controllo dei dati 1: se è richiesto solo un controllo dati 0: se il problema deve essere eseguito. -1: se il problema deve essere eseguito con al max. 1 file per le inform. sugli elementi	col. 45 codice memoria righezza struttura. 0: se matrice registrata in nucleo 1: se registrata in memoria di lavoro.	col. 46-55 spazio COMMON	<b>B1</b>	
18	9	3	1	0	5	1	0	0	0	0	0

INFORMAZIONI SULLA GEOMETRIA DELLA STRUTTURA : (COORDINATE DEI NODI DI CONTROLLO)	
col. 1-5 n° del nodo in sequenza	col. 6-15 col. 6-15 coordinata x del nodo. col. 16-25 col. 16-25 coordinata y del nodo.
1	0
2	550.0
3	1100.0
4	0
5	550.0
6	1100.0
16	0
17	550.0
18	1100.0

B2

INFORMAZIONI SULLA GEOMETRIA DELLA STRUTTURA : (COMANDI PER GENERAZIONE COORDINATE NODI PER LINEA DIRITTA)			
col. 1-5 n° del nodo all'inizio della linea.	col. 6-10 col. 6-10 n° del nodo alla fine della linea.	col. 11-15 col. 11-15 n° dei nodi generati lungo la linea.	col. 16-20 col. 16-20 differenza nella numeraz. dei nodi, tra due successivi nodi della serie. bianco o zero significa 1 nodo.
4	16	3	3
5	17	3	3
6	18	3	3

col. 21-30  
col. 21-30  
spazio tra due successivi nodi generati.  
se >=1, s assume uguale all'attuale spazio  
se <1, il numero scritto è pari al rapporto tra lo e la lunghezza della linea generatrice.  
se =0 oppure bianco, i nodi sono spazati uniformemente lungo la linea.

B3

INFORMAZIONI SULLA GEOMETRIA DELLA STRUTTURA : (COMANDI PER NODI CON SPOSTAMENTI NULLI)			
col. 1-5 n° del nodo o n° del primo nodo della serie di nodi coperti da questo comando.	col. 10 col. 10 codice per lo spostamento x =1 se lo spostamento è nullo -0 o bianco se altro.	col. 15 col. 15 codice per lo spostamento y ←-	col. 20 col. 20 codice per la rotazione. ←-
1	1	1	1

col. 21-25  
col. 21-25  
n° dell'ultimo nodo della serie.  
lasciare bianco se 1 solo nodo.

col. 26-30  
col. 26-30  
differenza nella numeraz. dei nodi tra due  
successivi nodi della serie.  
bianco o zero significa 1 nodo.

B4





INFORMAZIONI SMORZAMENTO			
col. 1-10 fattore di proporz. dello smorzamento alla massa $\alpha$	col. 11-20 fattore di proporz. dello smorzamento alla rigidità: $\beta$ per la corrente rigidità tangente.	col. 21-30 fattore di proporz. dello smorzamento alla rigidità $\beta_0$ per l'originale rigidità elastica.	col. 31-40 fattore di smorzamento strutturale : $\delta$
0.05	0	0	0

C4

SPECIFICAZIONE NELLA STORIA DEL TEMPO DELL'OUTPUT (INFORMAZIONI DI CONTROLLO)													
col. 1-5 Intervallo di tempo per cui scrivere la storia nel tempo degli spostam. nodali (mult. D) bianco per no output	col. 6-10 Intervallo di tempo per cui scrivere la storia nel tempo degli elementi (mult. D) bianco per no output	col. 11-15 Intervallo di tempo per la scrittura intermedia dell'involuppo dei valori.	col. 16-20 n° dei nodi per cui è richiesta la storia nel tempo degli spostamenti x. (NHOUT)	col. 21-25 n° dei nodi per cui è richiesta la storia nel tempo degli spostamenti y. (NVOUT)	col. 26-30 n° dei nodi per cui è richiesta la storia nel tempo delle rotazioni. (NROUT)	col. 31-35 n° di coppie di nodi per cui è richiesta la storia nel tempo degli spost. relativi x (NHR).	col. 36-40 n° di coppie di nodi per cui è richiesta la storia degli spost. relativi y (NVR)	col. 45 cod. per la scritt. degli sp. nod. 0: bianco: storia come comput. progressivamente 1: entrambe le scritture 2: solo scrit. nord a fine calcol	col. 50 cod. per scritt. spost. nod. rel. C.S.	col. 55 cod. per scritt. elementi C.S.	col. 56-60 codice reg. mem. spost. nod. 0/ bianco: scritta ma non conserv >>-0:cons. TAPEZ	col. 61-65 cod. reg mem. elementi C.S.	col. lunom=0
1000	1000	0	7	7	7	0	1	0	0	1	0	0	0

D1

LISTA DEI NODI PER LA STORIA NEL TEMPO DEGLI SPOSTAMENTI X
<p>bisognano tante schede quanto specificato dai n° dei nodi NHOUT/10. - ometti se NHOUT=0</p> <p>4,7,10,13,16,17,18</p>

D2

LISTA DEI NODI PER LA STORIA NEL TEMPO DEGLI SPOSTAMENTI Y
<p>C.S.</p> <p>4,7,10,13,16,17,18</p>

D3

LISTA DEI NODI PER LA STORIA NEL TEMPO DELLE ROTAZIONI
<p>C.S.</p> <p>4,7,10,13,16,17,18</p>

D4

LISTA DEI NODI PER LA STORIA NEL TEMPO DEGLI SPOSTAMENTI RELATIVI X
<p>bisognano tante schede quanto specificato dai n° di coppie di nodi NHR. 5 coppie ogni scheda. ometti se NHR=0</p>

D5

LISTA DEI NODI PER LA STORIA NEL TEMPO DEGLI SPOSTAMENTI RELATIVI Y
<p>C.S.</p>

D6

TRUSS ELEMENT (INFORMAZIONI DI CONTROLLO).			
col. 5 premi 1 per indicare che il gruppo consiste di truss element.	col. 6-10 n° di elementi nel gruppo.	col. 11-15 n° di differenti tipi di rigidità per elemento. (max.40)	col. 16-20 n° di differenti modelli di forze d'incastro perfetto. (max.40)
<b>E1(a)</b>			

TRUSS ELEMENT (TIPI DI RIGIDITÀ)			
col. 1-5 n° del tipo di rigidità in sequenza a partire da 1	col. 6-15 modulo elastico di Young.	col. 16-25 modulo di incrudimento proporz. del mod. di Young	col. 26-35 area media sezione trasversale.
			col. 36-45 tensione di snervamento a trazione.
			col. 46-55 tensione di snervamento o tensione di imbrozzamento a compressione.
			col. 60 codice di imbrozzamento. premi 1 se l'elemento si imbrozza elasticamente a compressione premi 0 o lascia bianco se l'elemento si snerva a compressione senza imbrozzamento.
<b>E1(b)</b>			

TRUSS ELEMENT (MODELLI DI FORZE D'INCASTRO)			
col. 1-5 n° del modello in sequenza a partire da 1	col. 10 codice assi: codice =0 : le forze sono nel sistema di coordinate dell'elemento codice =1 : le forze sono nel sistema di coordinate globali.	col. 11-20 forza FI	col. 11-20 forza VI
			col. 11-20 forza VJ
<b>E1(c)</b>			

TRUSS ELEMENT (COMANDI PER LA GENERAZIONE DI ELEMENTI)- includere le schede per il primo e per l'ultimo elemento)							
col. 1-5 n° dell'elemento o n° della serie numerata in sequenza.	col. 6-10 n° del nodo estremo i	col. 11-15 n° del nodo estremo j	col. 16-20 incr. del n° di nodo. per generaz. dell'elemento. 0 o bianco=1	col. 21-25 n° del tipo di rigidità.	col. 30 codice per includere la rigid. geometrica 1 = includi 0 = ignora	col. 35 codice output storia nel tempo 0 o bianco : non richiesta 1 : richiesta	col. 36-40 n° modello forze d'incastro per carichi statici fissi bianco se non ci sono carichi fissi.
						col. 41-45 n° modello forze d'incastro per car. statici accidentali bianco se non ci sono carichi accidentali.	col. 46-50 fattore di scala da applic. alle forze d'incastro dovute ai carichi statici fissi bianco se non carichi
							col. 51-55 fatt. di sc. da app. alle forze d'incast. per carichi acc. (+ trazione)
							col. 56-65 forza assiale iniziale (+ trazione)
<b>E1(d)</b>							



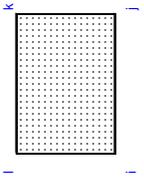
ELEMENTI TRAVE COLONNA (MODELLI DI FORZE D'INCASTRO PERFETTO)									
col. 1-5 n° del modello in seq. a partire da 1	col. 10 codice assi: -0 : forze nel sistema di coordinate dell'elemento =1 : forze nel sistema di coordinate globali	col. 11-20 forza Fi	col. 21-30 forza Vi	col. 31-40 momento Mi	col. 41-50 forza Fj	col. 51-60 forza Vj	col. 61-70 momento Mj	col. 71-80 fattore di riduzione dei carichi accidentali, per il calcolo delle forze di carico accidentale applicate ai nodi.	E2 (e)

ELEMENTI TRAVE COLONNA ( MODELLI DI FORZE INIZIALI SUGLI ELEMENTI)									
col. 1-5 n° del modello in seq. a partire da 1	col. 6-15 forza assiale iniziale : Fi	col. 16-25 forza di taglio iniziale Vi	col. 26-35 momento iniziale Mi	col. 36-45 forza assiale iniziale : Fj	col. 46-55 forza di taglio iniziale Vj	col. 56-65 momento iniziale Mj			E2(f)

ELEMENTI TRAVE COLONNA ( COMANDI PER LA GENERAZIONE DEGLI ELEMENTI)																
COL. 1-5 n° dell'elemento o n° del primo elemento della serie di elementi coperti da questo comando.	col. 6-10 n° del nodo estremo i	col. 11-15 n° del nodo estremo j	col. 16-20 incremento n° nodo 0 o bianco =1	col. 21-25 n° del tipo di rigidità all'estremo.	col. 26-30 n° del tipo di eccentricità	col. 31-35 n° del tipo di sup di snervam. estremo i	col. 36-40 n° del tipo di sup di snerv estremo j	col. 41-45 codice per includere la rigidità geom. 1 per includere 0 per ignorare	col. 50 codice output 0 non richiesta 1 richiesta	col. 51-55 n° modello forze d'incastro per carichi fissi	col. 56-60 n° modello forze d'incastro carichi accidentali	col. 61-65 fattore scala per forze d'incastro carichi fissi	col. 66-70 fattore scala per forze d'incastro carichi accidentali	col. 71-75 n° modello forze iniziali	col. 76-80 fattore di scala da applicare alle forze iniziali sufficentemente.	E2 (g)

ELEMENTI PANNELLI INFILL (INFORMAZIONI DI CONTROLLO).			E3(a)
col. 5 Per il 3 per indicare che questo gruppo consiste di pannelli.	col. 6-10 numero di elementi del gruppo.	col. 11-15 numero di differenti tipi di rigidità (max. 40)	

PANNELLI ( TIPI DI RIGIDEZZA ).					E3(b)	
col. 1-5 n° del tipo di rigidità in seq. a partire da 1	col. 6-15 modulo elastico di taglio.	col. 16-25 modulo di indurimento da deformazione a taglio. (proporzionale al modulo elastico a taglio).	col. 26-35 spessore medio del pannello	col. 36-45 tensione di snervamento a taglio.	col. 46-55 deformazione al collasso (proporz. della deformazione allo snerv.). non deve essere < di 1.	col. 60 codice di collasso, governante il comportamento dopo la crisi. 1: se la rigidità e la resistenza sono ridotte a 0 dopo la crisi. 0 o bianco: se la rigidità e la resistenza di componente elastica devono essere conservate dopo la crisi.

PANNELLI (COMANDI PER GENERAZIONE DEGLI ELEMENTI).					E3(c)			
col. 1-6 n° dell'elemento o n° del primo elemento della serie di elementi.	col. 6-10 n° del nodo i.	col. 11-15 n° del nodo j.	col. 16-20 n° del nodo k.	col. 21-25 n° del nodo l.	col. 26-30 incremento del n° di nodo per la generazione dell'elemento. 0 o bianco : si assume 1.	col. 40 codice per l'output. 0 o bianco: se non è richiesto. 1 : se è richiesto (agli intervalli in D1).	col. 41-50 sforzo di taglio iniziale sull'elemento.	

CONNESSIONI SEMI-RIGIDE (INFORMAZIONI DI CONTROLLO)		
col. 5 n° del tipo di rigidezza. rigidezza rotazionale iniziale. (momento per radianti)	col. 6-10 n° di elementi nel gruppo n° di elementi - connessioni semitrigide).	col. 11-15 n° di differenti tipi di rigidezza. (max 40)
		E4(a)

CONNESSIONI SEMI-RIGIDE (TIPI DI RIGIDEZZA)			
col. 1-5 n° del tipo di rigidezza. rigidezza rotazionale iniziale. (momento per radianti)	col. 16-25 rigidezza strain hardening proporzione della rigidezza rotazionale iniziale.	col. 26-35 momento di snervamento positivo.	col. 36-45 momento di snervamento negativo.
			E4(b)

CONNESSIONI SEMI-RIGIDE (COMANDI PER GENERAZIONE ELEMENTI)				
col. 1-5 n° dell'elemento o n° del primo elemento della serie.	col. 6-10 n° del nodo i	col. 11-15 n° del nodo j	col. 16-20 incremento nella numer. dei nodi. 0 o bianco : se non è richiesto. 1 : se è richiesto agli intervalli specificati nella scheda D1.	col. 21-25 n° del tipo di rigidezza.
			col. 30 codice output. 0 o bianco : se non è richiesto. 1 : se è richiesto agli intervalli specificati nella scheda D1.	col. 31-40 momento iniziale nella connessione.
				E4(c)

ELEMENTI TRAVE (INFORMAZIONI DI CONTROLLO)					
col. 5 n° del tipo di rigidezza. rigidezza rotazionale iniziale. (momento per radianti)	col. 6-10 n° di elementi del gruppo	col. 11-15 n° di diversi tipi di rigidezza (max 40)	col. 16-20 n° di diversi tipi di eccentricità (max 15)	col. 21-25 n° di differenti sup. d'interazione di snervamento per sez. trasversali (max 35)	col. 26-30 n° di differenti modelli di forze d'incastro perfetto. (max 35)
					col. 31-35 n° di differenti modelli di forze iniziali sull'elemento (max 30)
					E5(a)

ELEMENTI TRAVE (TIPI DI RIGIDEZZA)							
col. 1-5 n° del tipo di rigidezza. rigidezza rotazionale iniziale. (momento per radianti)	col. 6-15 modulo elastico di Young.	col. 16-25 modulo di incrudim. proporz. del mod. di Young.	col. 26-35 area media sezione trasversale.	col. 36-45 momento d'inerzia.	col. 46-50 fattore rigid. fless. K <sub>i</sub>	col. 51-55 fattore rigid. fless. K <sub>ij</sub>	col. 56-60 fattore rigid. fless. K <sub>ij</sub>
						col. 61-70 area effettiva di taglio. bianco o 0 se le def. di taglio sono ignorate oppure se sono già state prese in considerazione nei determinare i fattori di rigid. fless.	col. 71-80 rapporto di Poisson (usato per determinare il modulo di taglio, è richiesto solo se sono considerate le def. di taglio.)
							E5(b)





ELEMENTI TRAVE CON RIGIDEZZA DEGRADING (INFORMAZIONI DI CONTROLLO)									
col. 5 n° del tipo di rigidezza premi 6 (per indicare che il gruppo consiste di elementi trave con rigidezza degrading.	col. 6-10 n° di elementi nel gruppo	col. 11-15 n° di differenti tipi di rigidezza (max 40)	col. 16-20 n° di differenti tipi di eccentricità agli estremi. (max 15).	col. 21-25 n° di differenti valori del momento di snervamento per sezioni trasversali. (max 40).	col. 26-30 n° di differenti modelli di forze d'incastro perfetto. (max 34).	col. 31-35 n° di differenti modelli di forze sull'elemento. (max 30).	col. 40	col. 45	col. 50
6	25	3	0	10	0	0	0	0	0

ELEMENTI TRAVE CON RIGIDEZZA DEGRADING (TIPI DI RIGIDEZZA) - SCHEDA 1 : PROPRIETA' TRAVE									
col. 1-5 n° del tipo di rigidezza in seq. a partire da 1	col. 6-15 rigidezza flessionale, EI	col. 16-25 rigidezza assiale, EA	col. 26-35 rigidezza a taglio GA' se 0 o bianco le deformaz. di taglio sono trascurate.	col. 36-40 fattore rigidezza flessionale, Kij	col. 41-45 fattore rigidezza flessionale Kkj	col. 46-50 fattore rigidezza flessionale Kkj	col. 51-60 rapporto di inondimento da deformazione per flessione anelastica al nodo i. Se è specificata una cerniera con rigidezza non nulla per il nodo i sulla scheda 2, col. 6-15, allora questo rapporto sarà applicato direttamente alla relazione momento rotazione.	col. 61-70 ← per il nodo j.	E6 (b)
1	324828936162	657437650	0	4	4	2	0.005	0.005	0.005
2	213996634037	572056050	0	4	4	2	0.003	0.003	0.003
3	131767134412	486674550	0	4	4	2	0.003	0.003	0.003

ELEMENTI TRAVE CON RIGIDEZZA DEGRADING (TIPI DI RIGIDEZZA) - SCHEDA 2 - PROPRIETA' HINGE . (Lasciare bianco per avere modo lo TAKEDA).									
col. 1-5 n° del tipo di rigidezza, in seq. a partire da 1, e corrispond. prec. scheda	col. 6-15 rigidezza hinge al nodo i 0 o bianco se le propr. della cerniera devono essere determ. dal progr. se 0, anche col 16-25 = 0 ....	col. 16-25 rigidezza hinge nodo j ←	col. 26-35 parametro di rigidezza di scarto estremo i. 0 o bianco se = modello Takeda.	col. 36-45 $\alpha_j$ ← estremo j	col. 46-55 $\beta_i$ parametro carico estremo i 0 o bianco se = modello Takeda.	col. 56-65 $\beta_j$ ← estremo j	col. 66-75 N, parametri esponenziali di carico	E6 (b)	
1	324828936162	324828936162	0	0	0	0	1	1	
2	213996634037	213996634037	0	0	0	0	1	1	
3	131767134412	131767134412	0	0	0	0	1	1	

ELEMENTI TRAVE CON RIGIDEZZA DEGRADING (ECCENTRICITA' AGLI ESTREMI).				
col. 1-5 n° del tipo di eccentricità in sequenza a partire da 1	col. 6-15 X <sub>i</sub> : eccentricità lungo x all'estremo i Y <sub>i</sub> : eccentricità lungo y all'estremo i	col. 16-25 X <sub>j</sub> : eccentricità lungo x all'estremo j Y <sub>j</sub> : eccentricità lungo y all'estremo j	col. 26-35 Y <sub>i</sub> : eccentricità lungo y all'estremo i Y <sub>j</sub> : eccentricità lungo y all'estremo j	col. 36-45 Y <sub>j</sub> : eccentricità lungo y all'estremo j
				E6 (c)

ELEMENTI TRAVE CON RIGIDEZZA DEGRADING (TIPI DI MOMENTO DI SNERVAMENTO SEZ. TRASV.)									
col. 1-5 n° del tipo di momento di snervamento in sequenza da 1	col. 11-20 momento di snerv. positivo: M <sub>y+</sub>	col. 21-30 momento di snerv. negativo M <sub>y-</sub>	col. 31-40 momento ultimo positivo.	col. 41-50 momento ultimo negativo.	col. 51-55 curvatura ultima positiva	col. 56-60 curvatura ultima negativa.	col. 61-65 coefficiente: b indice di danno Manfredi.	col. 66-70 coefficiente: β indice di danno Park.	E6 (d)
1	4589195	-4589195	4793266	-4793266	0,000128	-0,000128	1,5	0,18	
2	3923567	-3923567	4067266	-4067266	0,000128	-0,000128	1,5	0,18	
3	2760708	-2760708	2933873	-2933873	0,000163	-0,000163	1,5	0,18	
4	2376216	-2376216	2519063	-2519063	0,000195	-0,000195	1,5	0,18	
5	1711122	-1711122	1822012	-1822012	0,000180	-0,000180	1,5	0,18	
6	2365795	-3167162	2508275	-3324021	0,000195	-0,000163	1,5	0,18	
7	1760532	-2645358	1865308	-2754771	0,000230	-0,000163	1,5	0,18	
8	1531606	-2435864	1627363	-2548674	0,000220	-0,000179	1,5	0,18	
9	1029258	-1760532	1096217	-1865308	0,000210	-0,000230	1,5	0,18	
10	784172	-1029258	833877	-1096217	0,000195	-0,000210	1,5	0,18	

ELEMENTI TRAVE CON RIGIDEZZA DEGRADING (MODELLI DI FORZE D'INCASTRO PERFETTO)								
col. 1-5 n° del modello in seq. a partire da 1	col. 10 codice assi: =0: forze nel sistema di coordinate dell'elemento =1: forze nel sistema di coordinate globali	col. 11-20 forza F <sub>i</sub>	col. 21-30 forza V <sub>i</sub>	col. 41-50 forza F <sub>j</sub>	col. 51-60 forza V <sub>j</sub>	col. 61-70 momento M <sub>j</sub>	col. 71-80 fattore di riduzione dei carichi accidentali, per il calcolo delle forze di carico accidentale applicate ai nodi.	E6 (e)



## **7. Applicazioni ed esempi**

Le formulazioni teoriche descritte nei capitoli precedenti, con il codice di calcolo automatico DADRA all'uopo dedicato, sono state utilizzate per lo studio di tre problemi-campione, riferiti a telai piani in cemento armato, allo scopo di saggiarne l'efficacia e la versatilità.

In particolare ciascuna delle tre strutture esaminate è stata sottoposta

i. ad un terremoto reale, allo scopo di effettuare un'analisi in ambito deterministico;

ii. ad una famiglia di terremoti, i cui accelerogrammi sono stati preliminarmente generati artificialmente, sotto particolari condizioni assegnate, allo scopo di raccogliere informazioni utili per analisi di tipo probabilistico.

I valori inseriti nei file "data", relativamente ad ognuno degli esempi svolti e per ciascun tipo di analisi, sono riportati nelle

tabelle che seguono. Inoltre i risultati ottenuti vengono pure illustrati con opportuni grafici.

Il codice DADRA, in conclusione dell'analisi deterministica del tipo i) precedentemente specificata, fornisce i seguenti risultati, calcolati ad ogni istante del processo di carico,

- valori delle sollecitazioni nodali per ciascun elemento del telaio;
- tripletta dei movimenti nodali per ciascun nodo della struttura;
- valori degli indici di danneggiamento calcolati in particolari concetti, prefissati, di tutte le membrature che compongono il telaio. Normalmente vengono assunti quali concetti critici per ogni asta quelli in prossimità del suo attacco ai nodi del telaio. La lunghezza del concetto critico è molto modesta e viene assunta pari ad una frazione  $\alpha$  dell'altezza a flessione della sezione trasversale della membratura considerata, con  $0.5 \leq \alpha \leq 1$ .

Nei vari grafici vengono riportate le seguenti informazioni associate con il processo di carico considerato,

- la legge evolutiva forza-movimento correlativo riferita a ciascun tronco critico della struttura;

- la storia nel tempo dei movimenti di ciascun nodo del telaio;
- la storia nel tempo degli indici di danneggiamento,  $D(t)$ , nei conci critici o terminali prima definiti degli elementi preselezionati.

Per un certo istante  $t_0$  prefissato, si possono subito individuare quali sono i conci in cui è intervenuta oppure è in corso la formazione di una cerniera plastica, ( $0 \leq D(t_0) \leq 1$ ), e quali sono quelli in cui è stata raggiunta la crisi, ( $D(t_0) > 1$ ).

Lo stesso codice, in conclusione di un'analisi di tipo probabilistico, in cui la struttura viene separatamente e di volta in volta sottoposta all'azione di  $n$  accelerogrammi generati artificialmente, fornisce in output  $n$  storie nel tempo  $R^{(i)}(t)$ , (Cfr. Fig.7.0), per ciascuno dei parametri di interesse prescelto, (movimenti nodali, caratteristiche della sollecitazione, indici di danneggiamento, etc.).

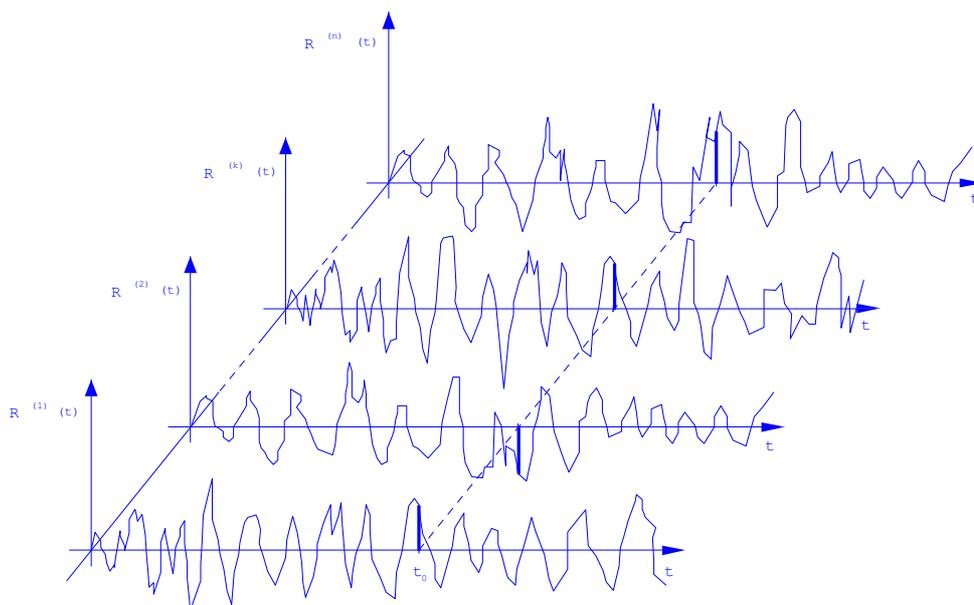


Figura 7.0 - Storie nel tempo del parametro  $R(t)$  prefissato

Il programma DADRA, fornisce in particolare i valori degli indici di danneggiamento nei conci terminali delle varie membrature della struttura, per ciascuno dei terremoti artificiali e per ogni istante del processo di carico, ed inoltre calcola i valori minimo, massimo, medio e deviazione standard delle relative distribuzioni statistiche.

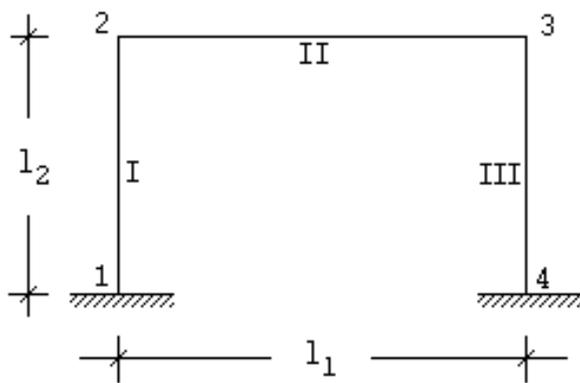
In questo modo, per ciascun istante  $t_0$  prefissato è possibile definire la variabile aleatoria associata al processo in esame, (Cfr. Fig. 7.0).

Infine, quando la struttura considerata viene sottoposta ad un numero  $n$  sufficientemente grande di terremoti artificiali è inoltre possibile tracciare gli istogrammi delle frequenze relative riferite a ciascuno dei conci critici delle sue membrature, allo scopo di acquisire le informazioni necessarie per determinare la probabilità di crisi dell'intero telaio.

### 7.1. Struttura n. 1 - Portale in c.a.

Si riportano qui di seguito alcuni risultati dell'analisi non lineare del portale in c.a., rappresentato in Figura 7.1.

Le proprietà assunte per i materiali sono le seguenti:  
 calcestruzzo classe  $R_{ck}=300\text{Kg/cm}^2$ , acciaio a durezza naturale tipo  $F_{eb}38\text{K}$ , controllato in stabilimento.



#### Dati generali della struttura:

$$l_1 = 5.00 \text{ m}$$

$$l_2 = 3.50 \text{ m}$$

#### Proprietà dei pilastri:

$$b = 30 \text{ cm}; H = 40 \text{ cm}; d = 3 \text{ cm}$$

$$A_S = A'_S = 10.18 \text{ cm}^2 \quad (4 \phi 18)$$

#### Proprietà delle travi:

$$b = 30 \text{ cm}; H = 60 \text{ cm}; d = 3 \text{ cm}$$

$$A_S = 12.57 \text{ cm}^2 \quad (4 \phi 20)$$

$$A'_S = 10.18 \text{ cm}^2 \quad (4 \phi 18)$$

$$1 \div 4 \quad \text{nodi}$$

$$I \div III \quad \text{membrature}$$

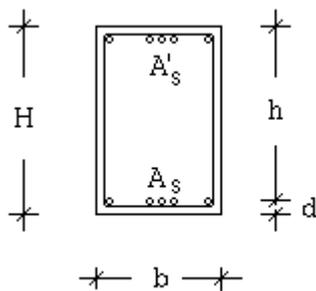


Figura 7.1 - Struttura n. 1 - Portale in c.a.

### 7.1.1. Esempio 1.1

**Analisi deterministica. Sisma di S. Rocco, (registrazione in data 15/09/1976, h09:21:18)**

Il file "data" utilizzato è quello riportato nella seguente Tabella 7.1.

**TABELLA 7.1 - ESEMPIO 1.1 PORTALE IN C.A. - SISMA DI S. ROCCO, (1976). ANALISI DETERMINISTICA - FILE "DATA"**

```
START      ESEMPIO 1.1
4,4,0,1,0,1,1,0,1,0
1,0.,0.
2,0.,350.
3,500.,350.
4,500.,0.
1,1,1,1,4,3
2,6250.,0,0,3,1,980.
0,0,1700,0.01,1.,1.,0.,0.,0.,1.
-2,0,0,0,0,1
0.,0.,0.,0.
10,10,500,2,2,2,0,0,1,0,1,1,1,0
2,3
2,3
2,3
6,3,2,0,2,0,0,0,0,0
1,39481480000,346075800,0.,4.,4.,2.,0.016,0.016
1,39481480000,39481480000,0,0,0,0,1.0
2,144349000000,533143800,0.,4.,4.,2.,0.01,0.01
2,144349000000,144349000000,0,0,0,0,1.0
1,912817.,-912817.,1100500.,-1100500,0.00033,-0.00033,1.6,0.116
2,1771000.,-1461850.,2147160.,-1772400.,0.00027,-0.00033,1.6,0.21
1,1,2,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1
2,2,3,0,2,0,2,2,0,1,0,0,1,1,0,1
3,3,4,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1
STOP
```

Nella figura 7.2 si riporta la legge di evoluzione momento-curvatura, ad ogni istante del processo di carico, relativamente alla

sezione di incastro del portale, (nodo 1). Nella figura 7.3 si riporta la storia nel tempo degli spostamenti lungo x del nodo 2.

Si osservi che, data la simmetria della struttura, gli spostamenti del nodo 3 sono gli stessi di quelli del nodo 2. Nella figura 7.4 è infine riportata la storia nel tempo delle rotazioni nel nodo 2. La figura 7.5 mostra invece la storia nel tempo degli indici di danneggiamento preliminarmente selezionati relativamente al concio prossimo al nodo 1. Per meglio comprendere il significato di tali indici, nella figura 7.6 si riporta la storia nel tempo della risposta strutturale ottenuta inserendo nel file "data" un arbitrario coefficiente di amplificazione pari ad 1,2 dell'accelerazione sismica registrata nel terremoto di S. Rocco del 1976. La figura 7.5 permette di far rilevare che in tutti e tre i modelli proposti, e fino all'istante  $t=3.7$  sec, la struttura non mostra di essere danneggiata, ( $D=0$ ). Superato questo limite temporale si producono apprezzabili danneggiamenti, caratterizzati da valori di D maggiori di zero. Sotto

il sisma assegnato non si raggiunge mai il valore di  $D=1.0$ , corrispondente al collasso di un concio critico e possibilmente dell'intera struttura. Nella figura 7.6, (accelerogramma amplificato), si noti che fino all'istante  $t=3.54$  sec si ha  $D=0$ ; da  $t=3.54$ sec a  $t=3.74$ sec si ha  $0 \leq D \leq 1.0$  e da  $t=3.74$ sec in poi si ha  $D > 1.0$ . In quest'ultima figura sono stati mostrati solo i valori degli indici di danneggiamento maturati fino all'istante  $t=5$ sec perchè, negli istanti successivi, l'indice di Cosenza e Manfredi cresce esponenzialmente in modo apparentemente anomalo, fatto che impedisce di effettuare utili confronti con i rimanenti due in esame.

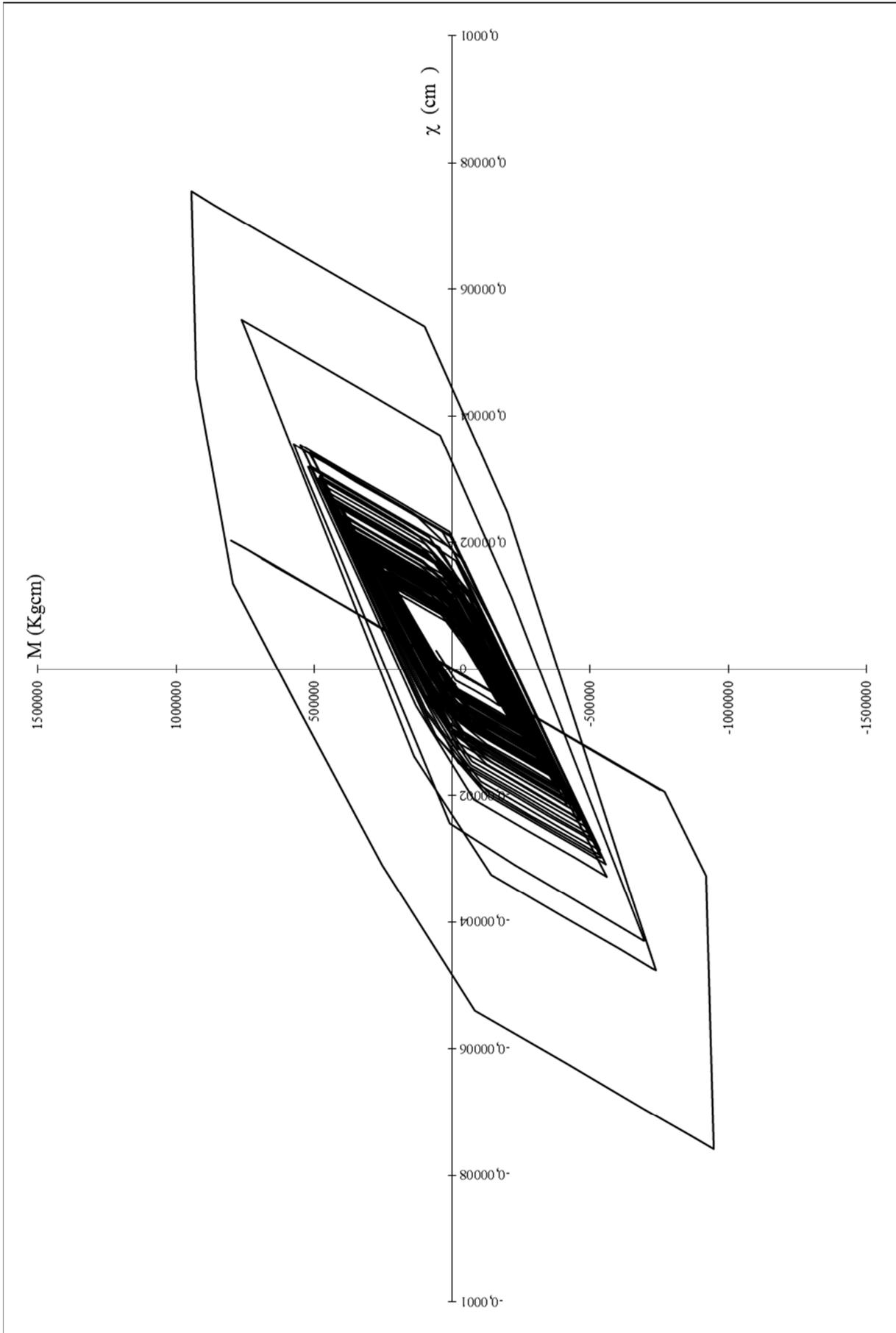


Figura 7.2 - Legge di evoluzione momento-curvatura nel nodo 1

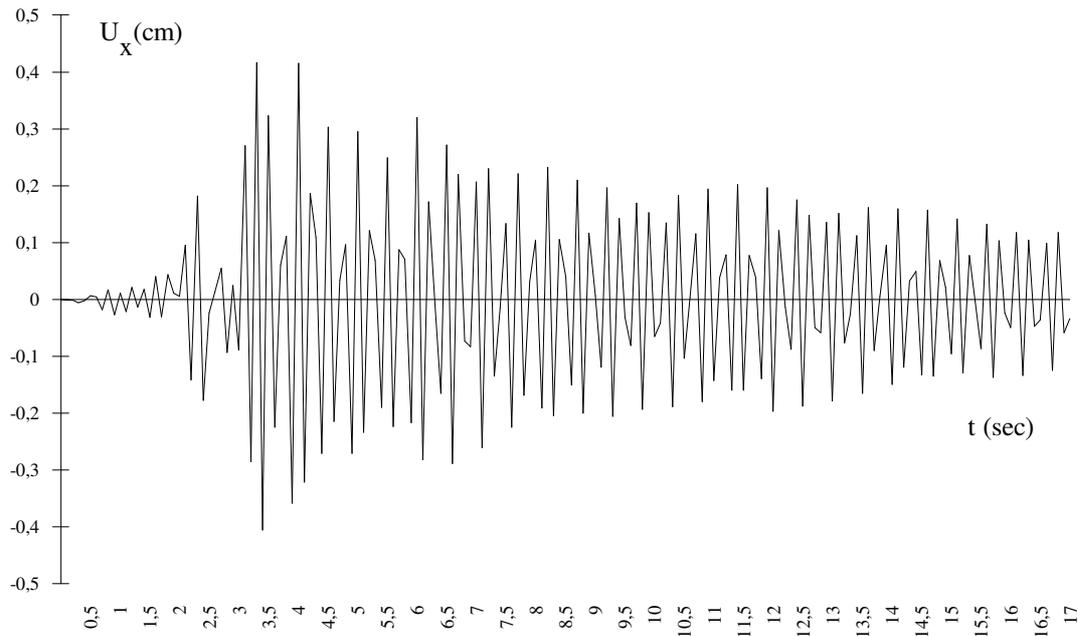


Figura 7.3 - Evoluzione degli spostamenti lungo X del nodo 2

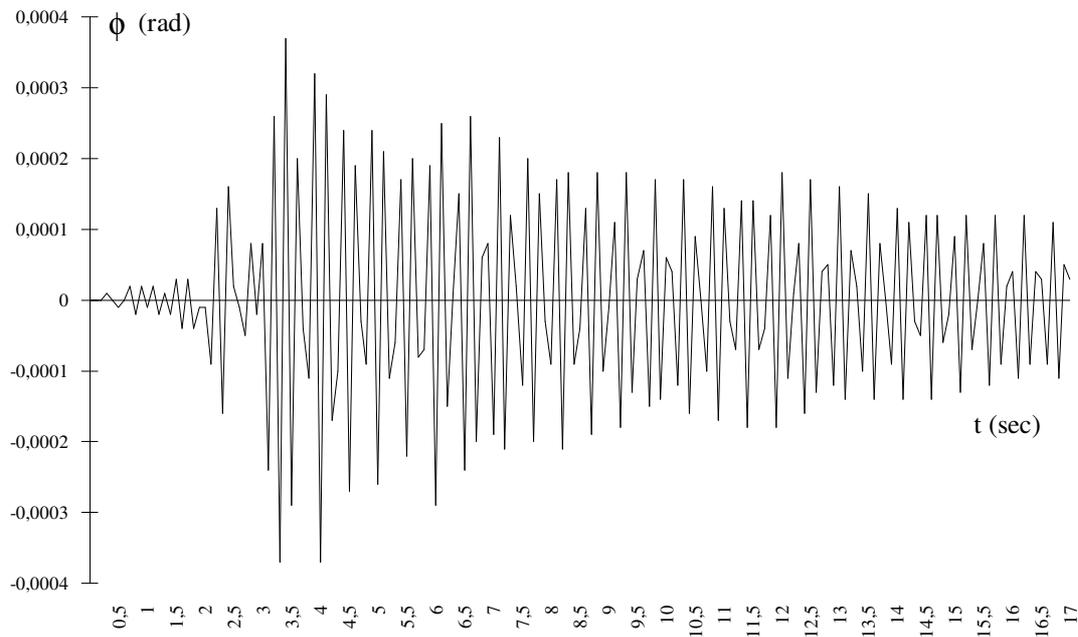


Figura 7.4 - Evoluzione delle rotazioni nel nodo 2

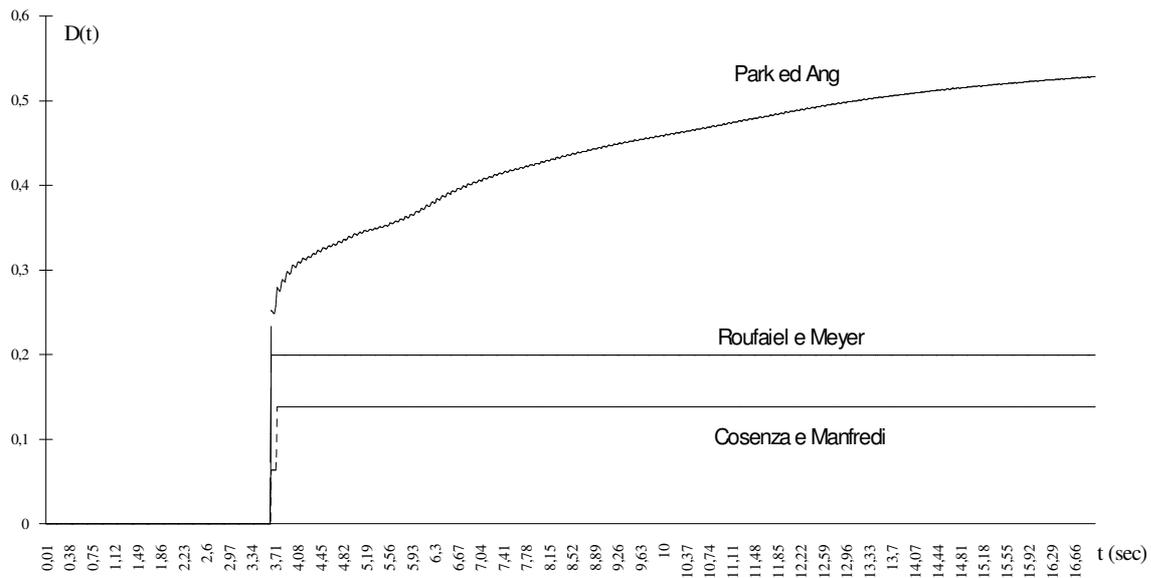


Figura 7.5 - Indici di danneggiamento nel nodo 1. Confronto con i vari modelli analizzati. Sisma di S. Rocco, 1976

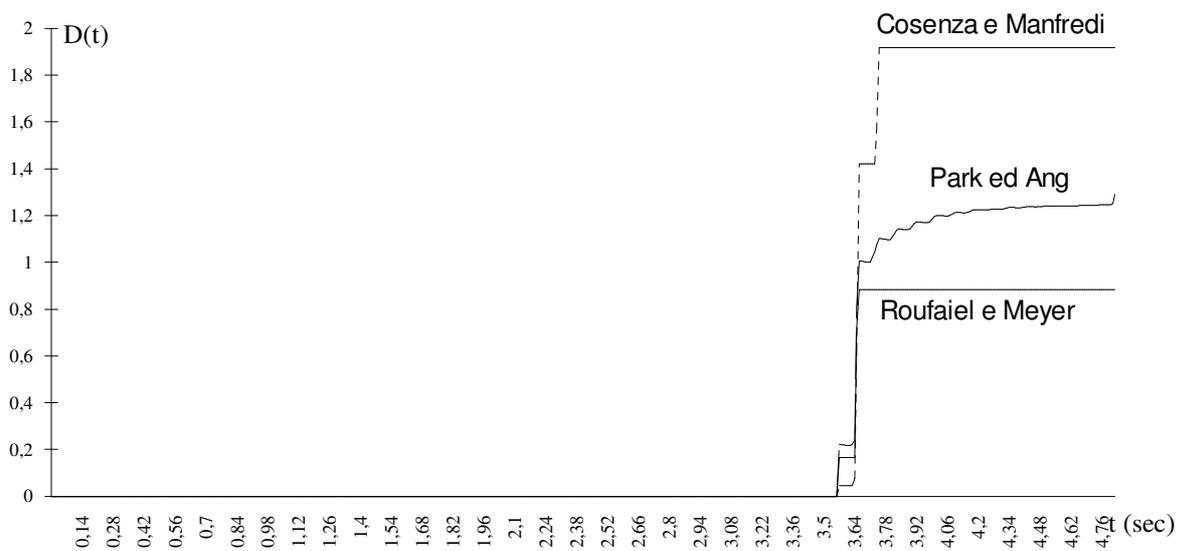


Figura 7.6 - Indici di danneggiamento nel nodo 1. Azioni del sisma di S. Rocco amplificate del 20%

### 7.1.2. Esempio 1.2

**Analisi deterministica del portale in c.a. prima considerato, sottoposto al sisma di cui alla registrazione di Forgia-Cornino, (1976)**

La durata del terremoto registrato a Forgia-Cornino in data 11/09/1976 alle ore 16:31:12 è stata di 15.1 sec.. Il file "data" relativamente a questo esempio è quello riportato nella Tabella 7.2 seguente.

**TABELLA 7.2 - ESEMPIO 1.2 PORTALE IN C.A. - SISMA DI FORGARIA, (1976). ANALISI DETERMINISTICA - FILE "DATA"**

```
START      ESEMPIO 1.2
4,4,0,1,0,1,1,0,1,0
1,0.,0.
2,0.,350.
3,500.,350.
4,500.,0.
1,1,1,1,4,3
2,6250.,0,0,3,1,980.
0,0,1510,0.01,1.,1.,0.,0.,0.,1.
-2,0,0,0,0,1
0.,0.,0.,0.
10,10,500,2,2,2,0,0,1,0,1,1,1,0
2,3
2,3
2,3
6,3,2,0,2,0,0,0,0,0
1,39481480000,346075800,0.,4.,4.,2.,0.016,0.016
1,39481480000,39481480000,0,0,0,0,1.0
2,144349000000,533143800,0.,4.,4.,2.,0.01,0.01
2,144349000000,144349000000,0,0,0,0,1.0
1,912817.,-912817.,1100500.,-1100500,0.00033,-0.00033,1.6,0.116
2,1771000.,-1461850.,2147160.,-1772400.,0.00027,-0.00033,1.6,0.21
1,1,2,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1
2,2,3,0,2,0,2,2,0,1,0,0,1,1,0,1
3,3,4,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1
STOP
```

La figura 7.7 riporta la relazione temporale tra momento e curvatura, relativamente al concio del nodo 1 e nelle figure 7.8 e 7.9 sono invece indicate le storie nel tempo degli spostamenti lungo  $x$  e delle rotazioni del nodo 2. Non si riporta il grafico relativo agli indici di danneggiamento, in quanto, per tutta la durata del terremoto, la struttura ha mostrato di non aver subito danni. Ciò si può facilmente dedurre anche dalla figura 7.7, osservando che non è stata mai superata la soglia di snervamento nel legame  $M-\chi$ .

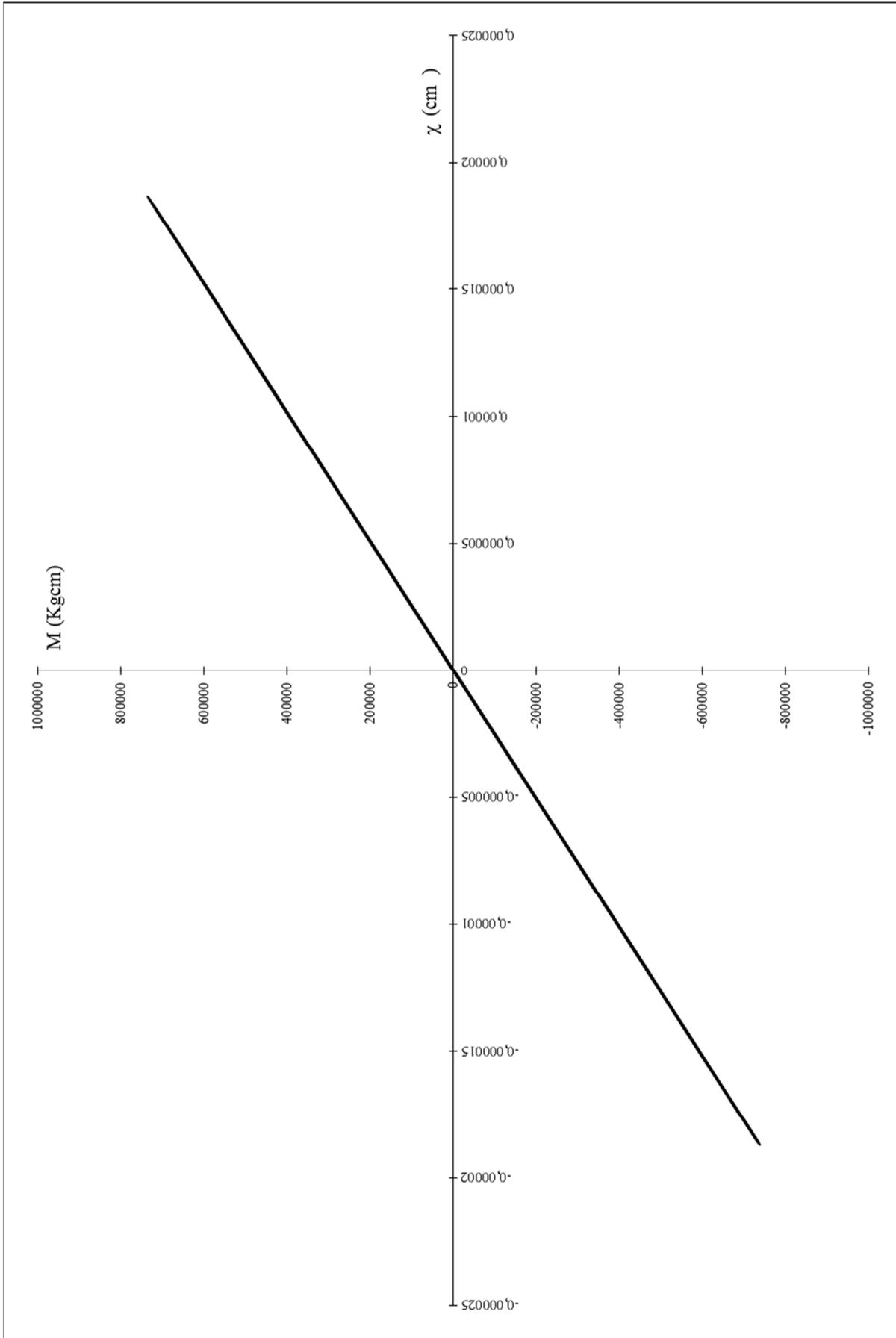


Figura 7.7 - Legge di evoluzione momento-curvatura nel nodo 1

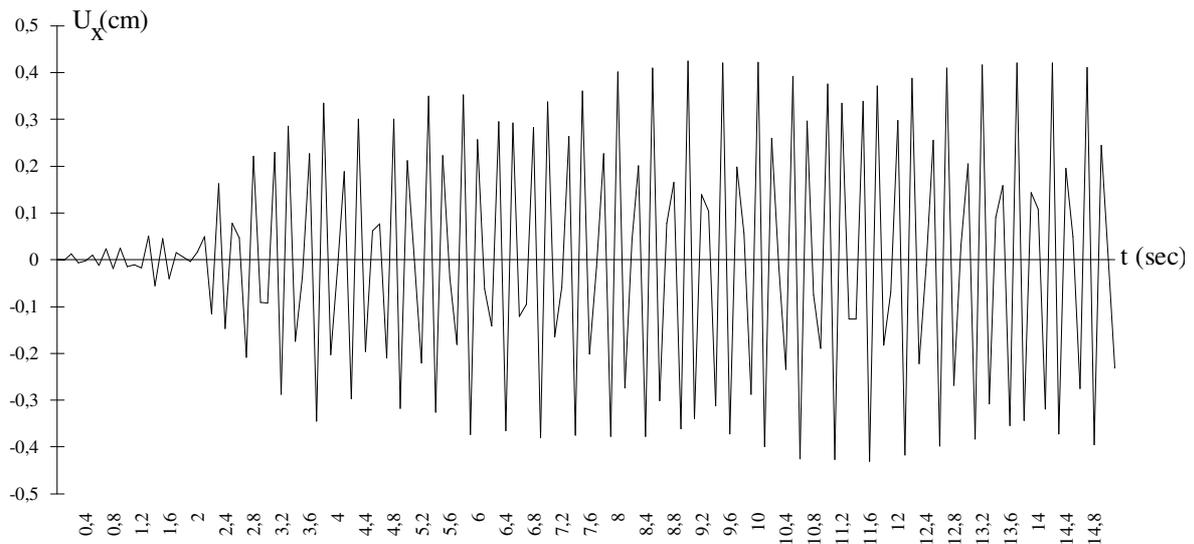


Figura 7.8 - Spostamenti lungo X del nodo 2

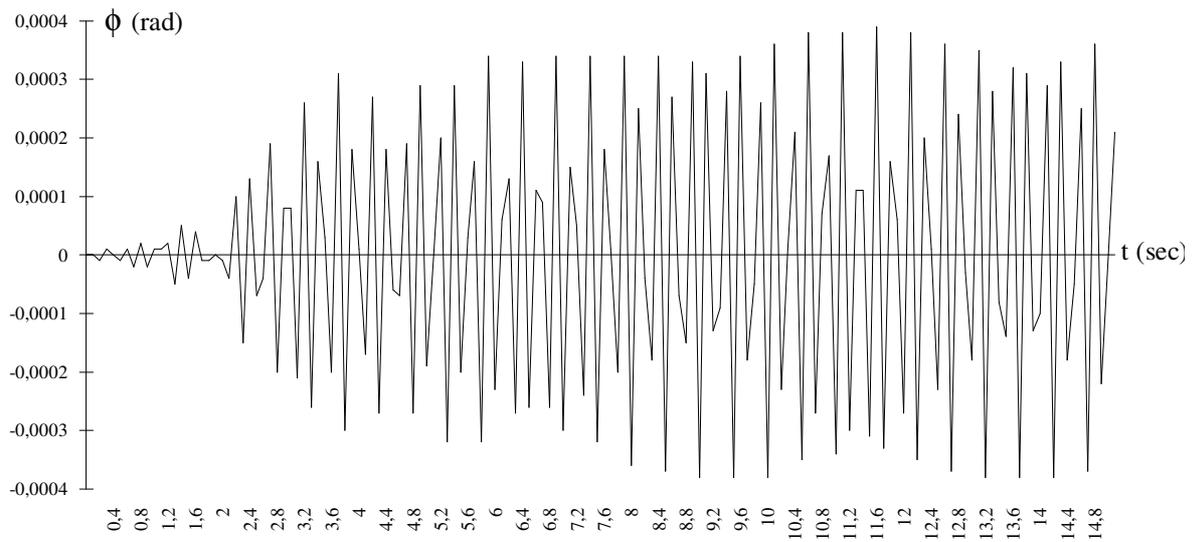


Figura 7.9 - Rotazioni nel nodo 2

### 7.1.3. Esempio 1.3

**Analisi probabilistica del portale prima considerato, sottoposto successivamente e separatamente all'azione di 10 terremoti generati artificialmente.**

Il file "data" occorrente per questa analisi è riportato in Tabella 7.3., avendo assunto per i parametri che caratterizzano il problema i valori riportati nella Tabella 7.4. La statistica degli indici di danneggiamento ad ogni istante è riportata nelle tabelle 7.5, 7.6 e 7.7, valutate rispettivamente agli istanti  $t=10\text{sec.}$ ,  $t=15\text{sec.}$  e  $t=17\text{sec.}$  Inoltre, per una più immediata lettura dei risultati, nella figura 7.10 sono indicati i valori medi dell'indice di danneggiamento di Park ed Ang. Infine, nelle figure 7.11, 7.12 e 7.13 sono mostrati i grafici di tre dei dieci accelerogrammi, generati artificialmente, che sono stati utilizzati nell'analisi svolta.

**TABELLA 7.3 - ESEMPIO 1.3 PORTALE IN C.A.  
ANALISI PROBABILISTICA - FILE "DATA"**

```

START      ESEMPIO 1.3
4,4,0,1,0,1,1,0,1,0
1,0.,0.
2,0.,350.
3,500.,350.
4,500.,0.
1,1,1,1,4,3
2,6250.,0,0,3,1,980.
0,0,1700,0.01,1.,1.,0.,0.,0.,1.
-1,0,0,0,0,3
0.,0.,0.,0.
10,10,500,2,2,2,0,0,1,0,1,1,1,0
2,3
2,3
2,3
6,3,2,0,2,0,0,0,0,0
1,39481480000,346075800,0.,4.,4.,2.,0.016,0.016
1,39481480000,39481480000,0,0,0,0,1.0
2,144349000000,533143800,0.,4.,4.,2.,0.01,0.01
2,144349000000,144349000000,0,0,0,0,1.0
1,912817.,-912817.,1100500.,-1100500,0.00033,-0.00033,1.6,0.116
2,1771000.,-1461850.,2147160.,-1772400.,0.00027,-0.00033,1.6,0.21
1,1,2,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1
2,2,3,0,2,0,2,2,0,1,0,0,1,1,0,1
3,3,4,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1
STOP

```

**TABELLA 7.4 - PARAMETRI DA PREFISSARE PER SVOLGERE  
L'ANALISI PROBABILISTICA PROPOSTA**

Numero di accelerogrammi da generare artificialmente	= 10
Valore di picco dell'accelerazione (cm/sec <sup>2</sup> )	= 235
Intervallo di tempo agli estremi del quale calcolare l'accelerazione (sec)	= 0.01
Numero di intervalli	= 1700
Frequenza cut-off, (Hz)	= 36
Coefficiente di smorzamento predominante	= 0.6
Frequenza caratteristica, (Hz)	= 10.6
Coefficiente alfa della funzione inviluppo	= 0.25
Coefficiente beta della funzione inviluppo	= 0.8

**TABELLA 7.5 - VALORI STATISTICI DEGLI INDICI DI DANNEGGIAMENTO  
PER T = 10.000 SEC.**

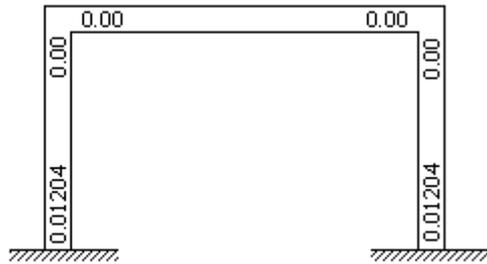
ELEM. N°	NODO N°		ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
1	1	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.04185	0.12043	0.00468
		VAL. MED.	0.00418	0.01204	0.00047
		DEV. STA.	0.01255	0.03613	0.00140
1	2	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
2	2	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
2	3	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
3	3	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
3	4	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.04185	0.12045	0.00468
		VAL. MED.	0.00418	0.01204	0.00047
		DEV. STA.	0.01255	0.03614	0.00140

**TABELLA 7.6 - VALORI STATISTICI DEGLI INDICI DI DANNEGGIAMENTO  
PER T = 15.000 SEC.**

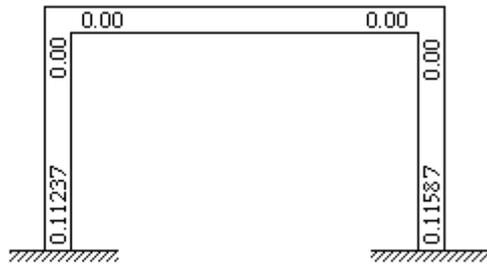
ELEM. N°	NODO N°		ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
1	1	VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.43412	0.92167	0.32550
		MAX.			
		VAL.	0.04760	0.11237	0.03302
		MED.			
1	2	DEV.	0.12944	0.27641	0.09750
		STA.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
2	2	VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MED.			
2	2	DEV.	0.00000	0.00000	0.00000
		STA.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
2	3	VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MED.			
2	3	DEV.	0.00000	0.00000	0.00000
		STA.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
3	3	VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MED.			
3	3	DEV.	0.00000	0.00000	0.00000
		STA.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.45774	0.95663	0.35430
		MAX.			
3	4	VAL.	0.04996	0.11587	0.03590
		MED.			
		DEV.	0.13650	0.28666	0.10614
		STA.			
		VAL.			
		MIN.			

**TABELLA 7.7 - VALORI STATISTICI DEGLI INDICI DI DANNEGGIAMENTO  
PER T = 17.000 SEC.**

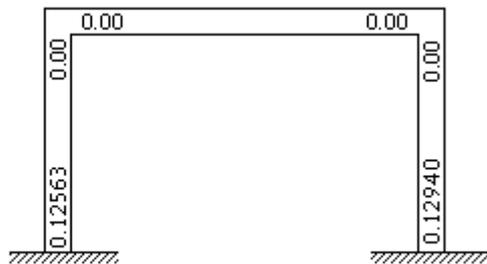
ELEM. N°	NODO N°		ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
1	1	VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.43412	1.02901	0.32550
		MAX.			
		VAL.	0.04760	0.12563	0.03302
		MED.			
1	2	DEV.	0.12944	0.30866	0.09750
		STA.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
2	2	VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MED.			
2	2	DEV.	0.00000	0.00000	0.00000
		STA.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
2	3	VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MED.			
2	3	DEV.	0.00000	0.00000	0.00000
		STA.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
3	3	VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MIN.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MAX.			
		VAL.	0.00000	0.00000	0.00000
		MED.			
3	4	DEV.	0.00000	0.00000	0.00000
		STA.			
		VAL.	0.45774	1.06671	0.35430
		MIN.			
		VAL.	0.04996	0.12940	0.03590
		MAX.			
3	4	VAL.	0.13650	0.31970	0.10614
		MIN.			
		VAL.			
		MAX.			
		VAL.			
		MED.			
3	4	DEV.			
		STA.			



a) time = 10.00 sec.



b) time = 15.00 sec.



c) time = 17.00 sec.

Figura 7.10 - Valor medio degli indici di danneggiamento in corrispondenza di tre istanti prefissati della storia di carico nei conci critici del portale

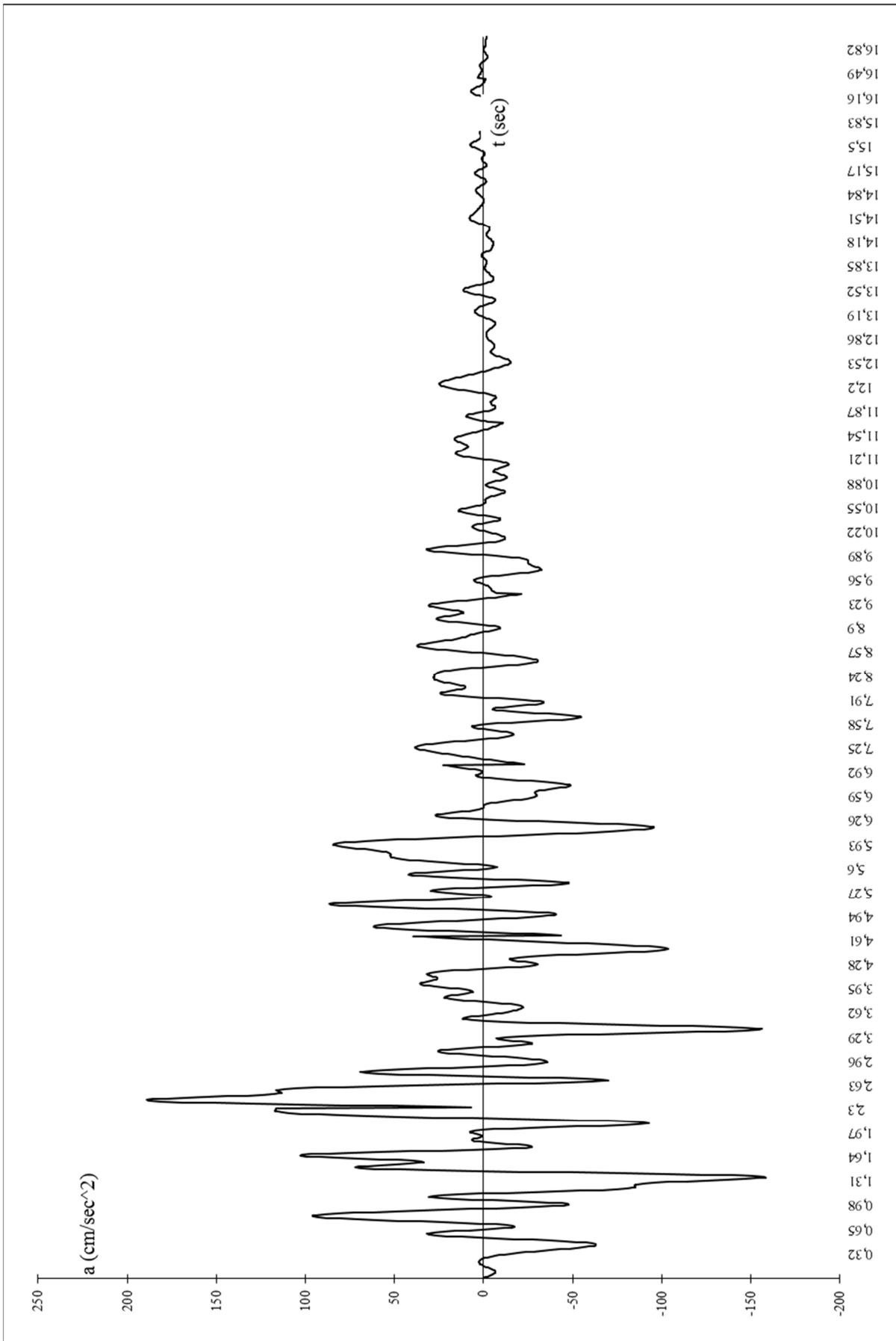


Figura 7.11 - Accelerogramma generato artificialmente n. 03

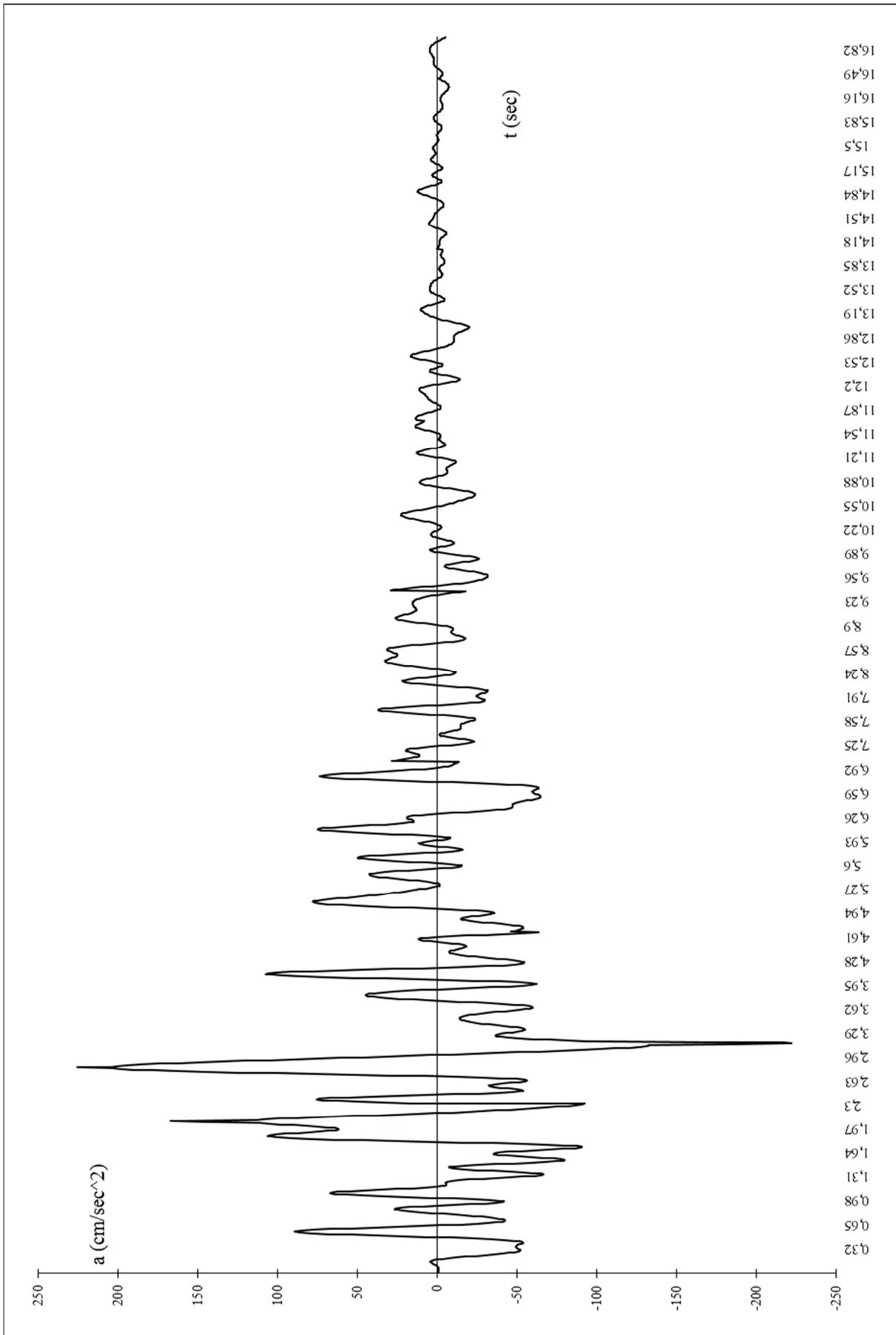


Figura 7.12 - Accelerogramma generato artificialmente n. 07

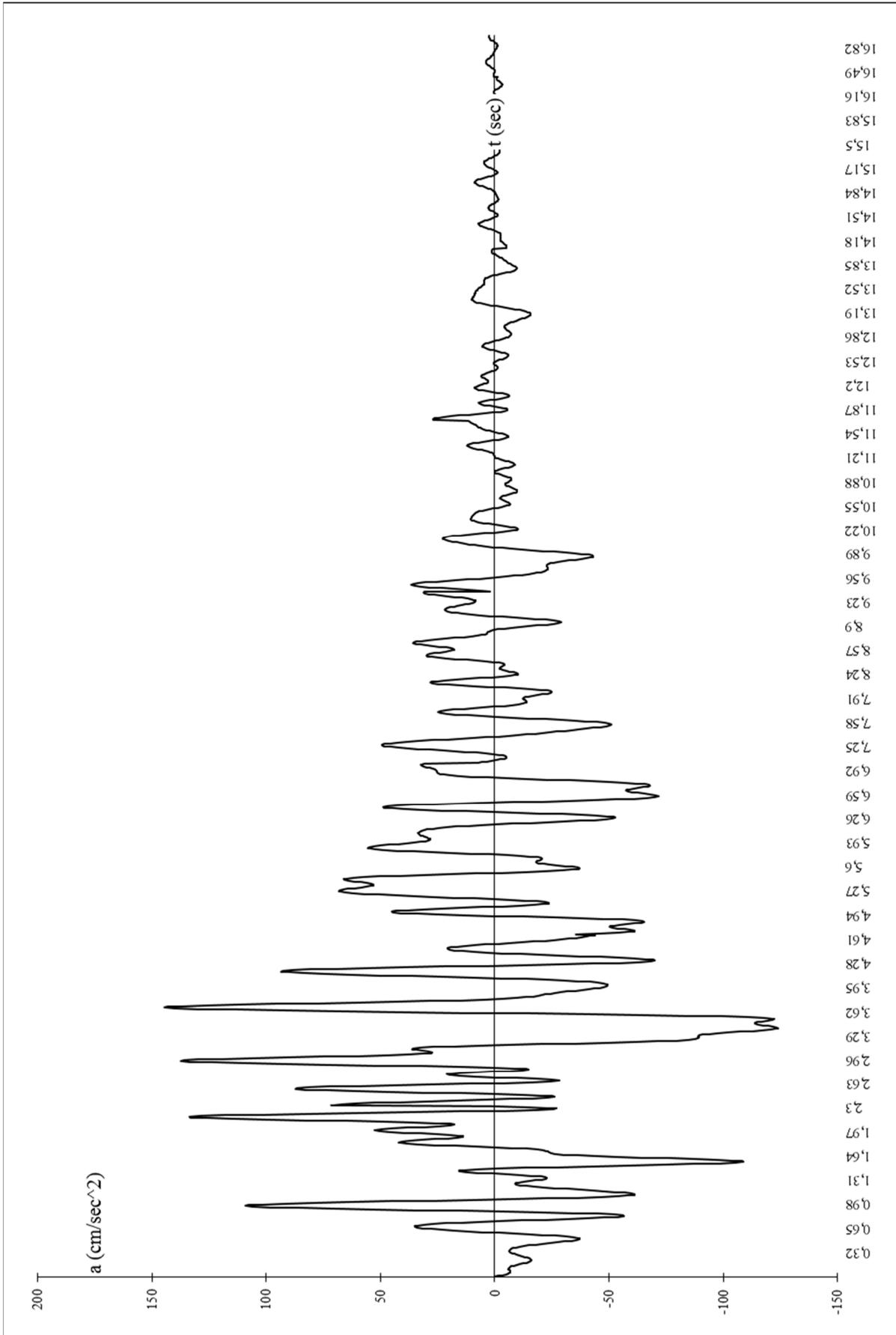


Figura 7.13 - Accelerogramma generato artificialmente n. 08

## 7.2. Struttura n. 2 - Telaio in c.a. a due piani ed a due campate

La geometria del telaio è riportata in figura 7.14. I dettagli costruttivi delle varie membrature costituenti sono indicati nelle figg. 7.15 e 7.16.

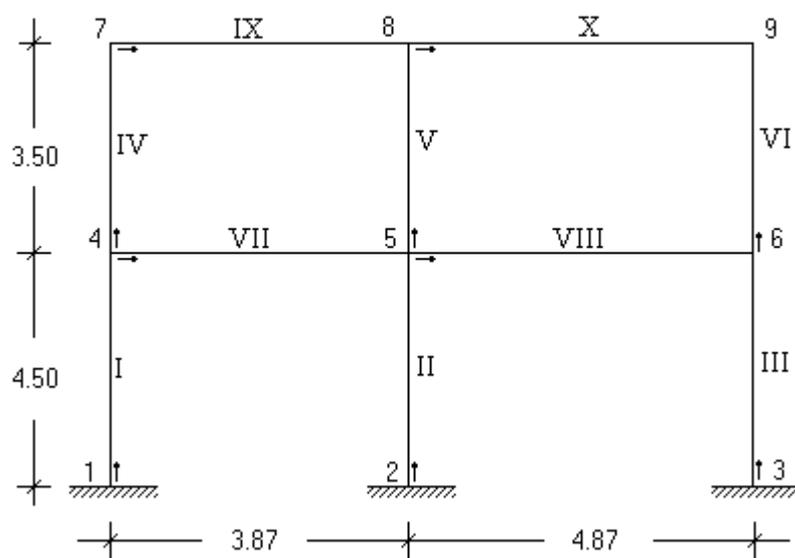
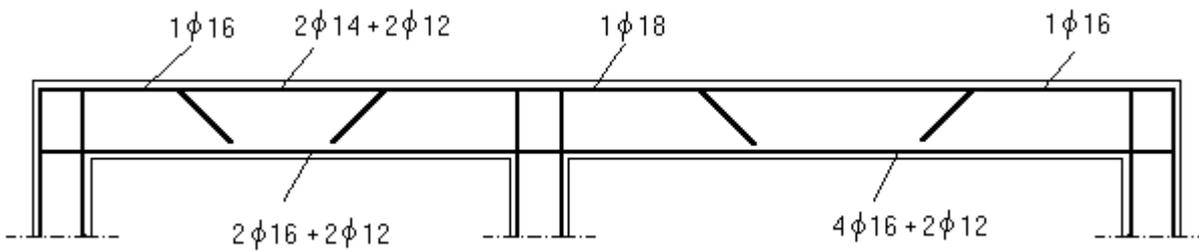


Figura 7.14 - Struttura n. 2 - Telaio in c.a.

Le proprietà meccaniche dei materiali sono state assunte come appresso:

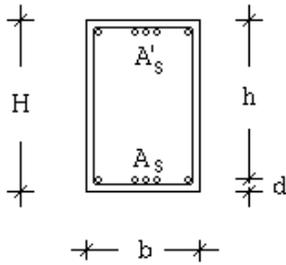
- conglomerato classe 300
- acciaio a durezza naturale Feb38K, controllato



Pilastrì

$b = 35 \text{ cm}; H = 35 \text{ cm}; d = 3 \text{ cm}$

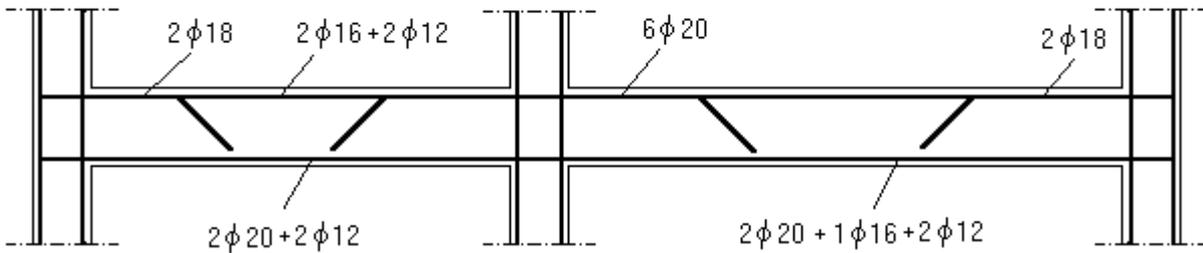
$A_S = A'_S = 10.30 \text{ cm}^2, (4 \phi 16 + 2 \phi 12)$



Travi

$b = 35 \text{ cm}; H = 50 \text{ cm}; d = 3 \text{ cm}$

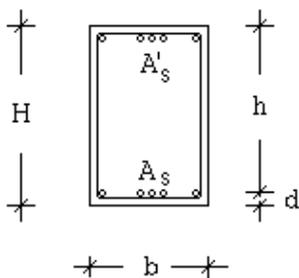
Figura 7.15 - Armatura del traverso superiore e dei pilastrì al piano primo



Pilastrì

$b = 35 \text{ cm}; H = 35 \text{ cm}; d = 3 \text{ cm}$

$A_S = A'_S = 14.83 \text{ cm}^2, (4 \phi 20 + 2 \phi 12)$



Travi

$b = 35 \text{ cm}; H = 50 \text{ cm}; d = 3 \text{ cm}$

Figura 7.16 - Armatura del traverso inferiore e dei pilastrì al piano terra

### 7.2.1. Esempio 2.1

#### **Analisi deterministica. Sisma di S. Rocco, 1976.**

Il file "data" occorrente per l'analisi di questa struttura è riportato in tabella 7.8. La struttura viene sottoposta al terremoto registrato a S. Rocco, il 15/09/1976 alle ore 09:21:18 e, tra i risultati forniti dal codice DADRA si commentano quelli appresso indicati.

Nella tabella 7.9 sono riportati i valori degli indici di danneggiamento nell'istante finale del sisma,  $t=17\text{sec}$ . Da tale tabella si deduce subito che, con riferimento all'indice di danno di Park ed Ang, in alcuni conci si è avuto il collasso, avendo lo stesso indice assunto valori maggiori dell'unità.

Nella tabella 7.10 sono specificati i valori degli indici di danno, relativamente ai nodi in cui essi sono significativi, ed in corrispondenza di alcuni istanti che precedono al collasso strutturale. Nelle figure 7.17 ÷ 7.24, infine, in corrispondenza degli

stessi istanti prima selezionati sono riportati gli spostamenti lungo  $x$  di ogni nodo. Nelle stesse figure vengono individuati con un "●" i nodi in cui l'indice di danneggiamento di Park ed Ang assume valori compresi tra 0 e 1, e con un "■" i nodi in cui tale indice assume valore maggiore di 1, (condizione di crisi nel nodo).

**TABELLA 7.8 - ESEMPIO 2.1 TELAIO IN C.A.**

**ANALISI DETERMINISTICA - FILE "DATA"**

```

START      ESEMPIO 2.1 - TELAIO 2 PIANI E 2 CAMPATE
9,6,3,1,0,4,1,0,0,0
1,0.0,0.0
2,387.0,0.0
3,874.0,0.0
7,0.0,800.0
8,387.0,800.0
9,874.0,800.0
1,7,1,3,450
2,8,1,3,450
3,9,1,3,450
1,1,1,1,3,1
4,4.6,4.6,0.,5,1,1.
5,3.25,3.25,0.,6,1,1.
7,3.45,3.45,0.,8,1,1.
8,2.8,2.8,0.,9,1,1.
0,0,1700,0.01,1.,1,1,1,1.E6,1
-2,0,0,0,0,1
0.075,0.,0.,0.
100,100,0,6,6,6,0,0,1,0,1,0,0,0
4,5,6,7,8,9
4,5,6,7,8,9
4,5,6,7,8,9
6,10,2,1,10,0,0,0,0,0
1,94409282070.,512861650.,0.,4.,4.,2.,0.005,0.005
1,94409282070.,94409282070.,0.,0.,0.,0.,1.
2,29796898133.,349182400.,0.,4.,4.,2.,0.006,0.006
2,29796898133.,29796898133.,0.,0.,0.,0.,1.
1,17.5,-17.5,0,0
1,871268.,-1010521.,927547.,-1076315.,0.00024,-0.00025,1.1,0.18
2,871268.,-1078784.,927547.,-1149006.,0.00024,-0.00025,1.1,0.18
3,1384858.,-1078784.,1472495.,-1149005.,0.00026,-0.00025,1.1,0.18
4,1384858.,-1010521.,1472495.,-1076315.,0.00026,-0.00025,1.1,0.18
5,1163085.,-1517495.,1238598.,-1611125.,0.00025,-0.00027,1.1,0.2
6,1163085.,-3069057.,1238598.,-3153375.,0.00025,-0.00016,1.1,0.14
7,1261474.,-1261474.,1306847.,-1306847.,0.00026,-0.00026,1.1,0.18
8,913286.,-913286.,962645.,-962645.,0.00038,-0.00038,1.1,0.14
9,1416147.,-3069057.,1505127.,-3153375.,0.00027,-0.00016,1.1,0.14
10,1416147.,-1517495.,1505127.,-1611125.,0.00027,-0.00027,1.1,0.16
1,1,4,1,2,0,7,7,0,1,0,0,1,1,0,1
4,4,7,1,2,0,8,8,0,1,0,0,1,1,0,1
7,4,5,1,1,1,5,6,0,1,0,0,1,1,0,1
8,5,6,1,1,1,9,10,0,1,0,0,1,1,0,1
9,7,8,1,1,1,1,2,0,1,0,0,1,1,0,1
10,8,9,1,1,1,3,4,0,1,0,0,1,1,0,1
STOP

```

**TABELLA 7.9 - ESEMPIO 2.1 - INDICI DI DANNO PER  $t = 17.00$  sec.**

ELEM. N°	NODO N°	ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
1	1	0.00000	0.00000	0.00000
	4	0.00000	0.00000	0.00000
2	2	0.81292	2.09629	1.69874
	5	0.21147	0.56252	0.18457
3	3	0.00000	0.00000	0.00000
	6	0.00000	0.00000	0.00000
4	4	0.00000	0.00000	0.00000
	7	0.00000	0.00000	0.00000
5	5	0.00000	0.00000	0.00000
	8	0.00000	0.00000	0.00000
6	6	0.00000	0.00000	0.00000
	9	0.00000	0.00000	0.00000
7	4	0.96241	2.35033	2.30931
	5	0.00000	0.00000	0.00000
8	5	0.00000	0.00000	0.00000
	6	0.00000	0.00000	0.00000
9	7	0.00000	0.00000	0.00000
	8	0.00000	0.00000	0.00000
10	8	0.00000	0.00000	0.00000
	9	0.00000	0.00000	0.00000

**TABELLA 7.10.a - ESEMPIO 2.1 - INDICI DI DANNO IN VARI ISTANTI****t = 2.95 sec**

ELEM. N°	NODO N°	ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
2	2	0.27763	0.44265	0.26855
	5	0.00000	0.00000	0.00000

**t = 3.00 sec**

ELEM. N°	NODO N°	ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
2	2	0.27763	0.43179	0.26855
	5	0.00000	0.00000	0.00000

**t = 3.10 sec**

ELEM. N°	NODO N°	ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
2	2	0.27763	0.45566	0.26855
	5	0.00000	0.00000	0.00000

**t = 3.11 sec**

ELEM. N°	NODO N°	ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
2	2	0.27763	0.46055	0.26855
	5	0.00000	0.00000	0.00000
7	4	0.03486	0.09147	0.02338
	5	0.00000	0.00000	0.00000

**t = 3.12 sec**

ELEM. N°	NODO N°	ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
2	2	0.27763	0.47631	0.33337
	5	0.00000	0.00000	0.00000
7	4	0.51485	0.63585	0.49810
	5	0.00000	0.00000	0.00000

**TABELLA 7.10.b - ESEMPIO 2.1 - INDICI DI DANNO IN VARI ISTANTI****t = 3.13 sec**

ELEM. N°	NODO N°	ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
2	2	0.61981	0.84016	0.91281
	5	0.01544	0.19217	0.00978
7	4	0.82168	1.01309	1.31829
	5	0.00000	0.00000	0.00000

**t = 3.14 sec**

ELEM. N°	NODO N°	ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
2	2	0.81292	1.03285	1.69874
	5	0.21107	0.37989	0.18457
7	4	0.96241	1.19451	2.30931
	5	0.00000	0.00000	0.00000

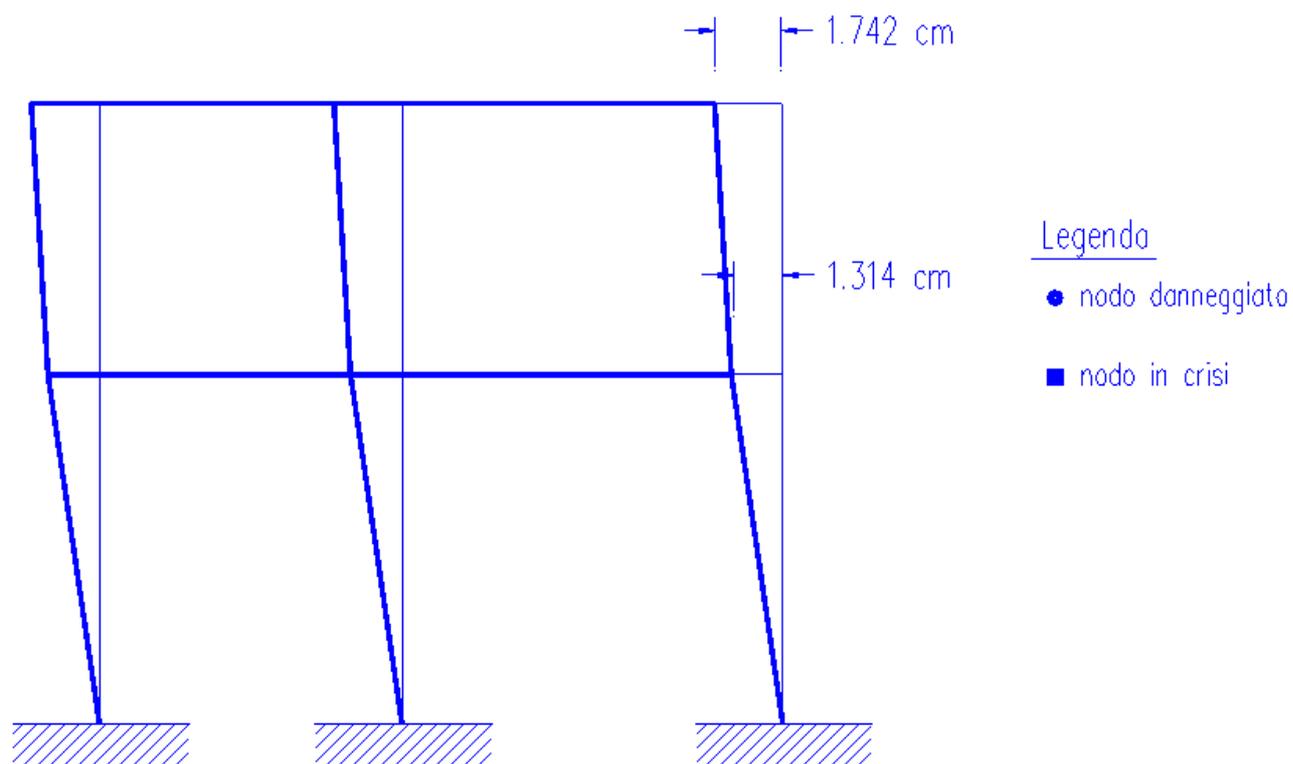


Figura 7.17 - Spostamenti lungo x e danneggiamento, ( $t=2.900$  sec.)

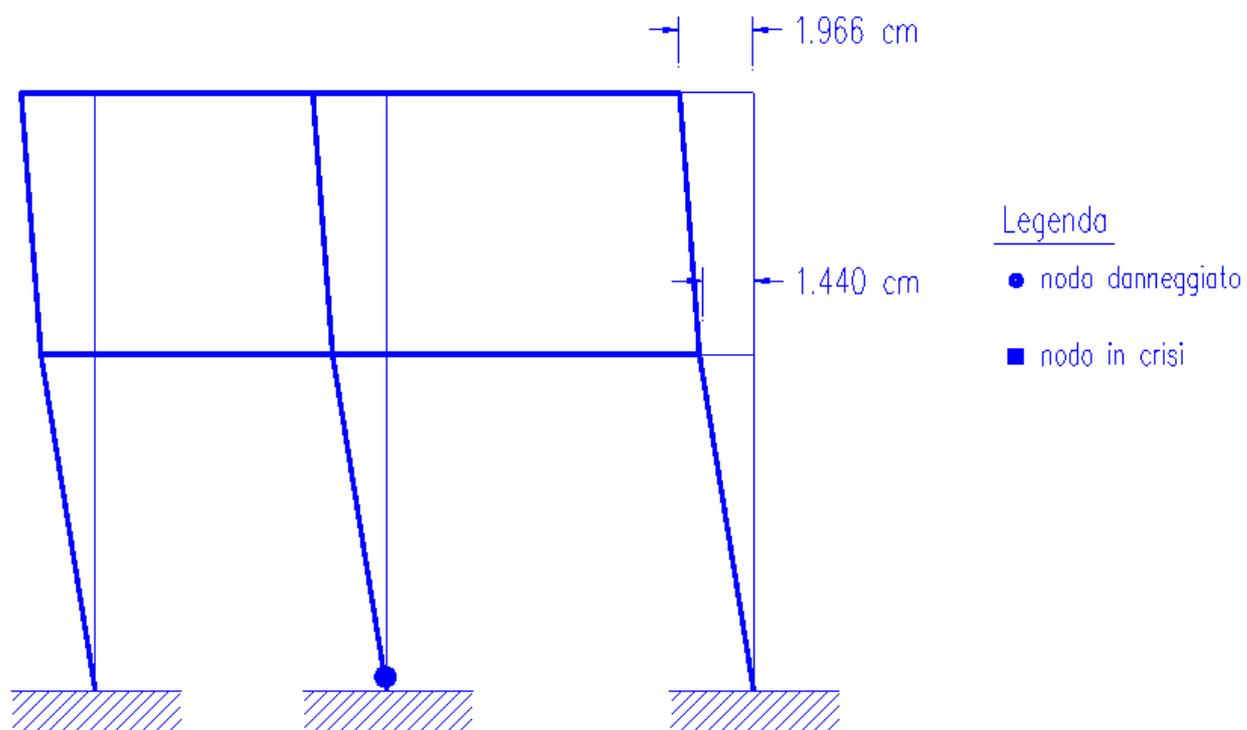


Figura 7.18 - Spostamenti lungo x e danneggiamento, ( $t = 2.950$  sec.)

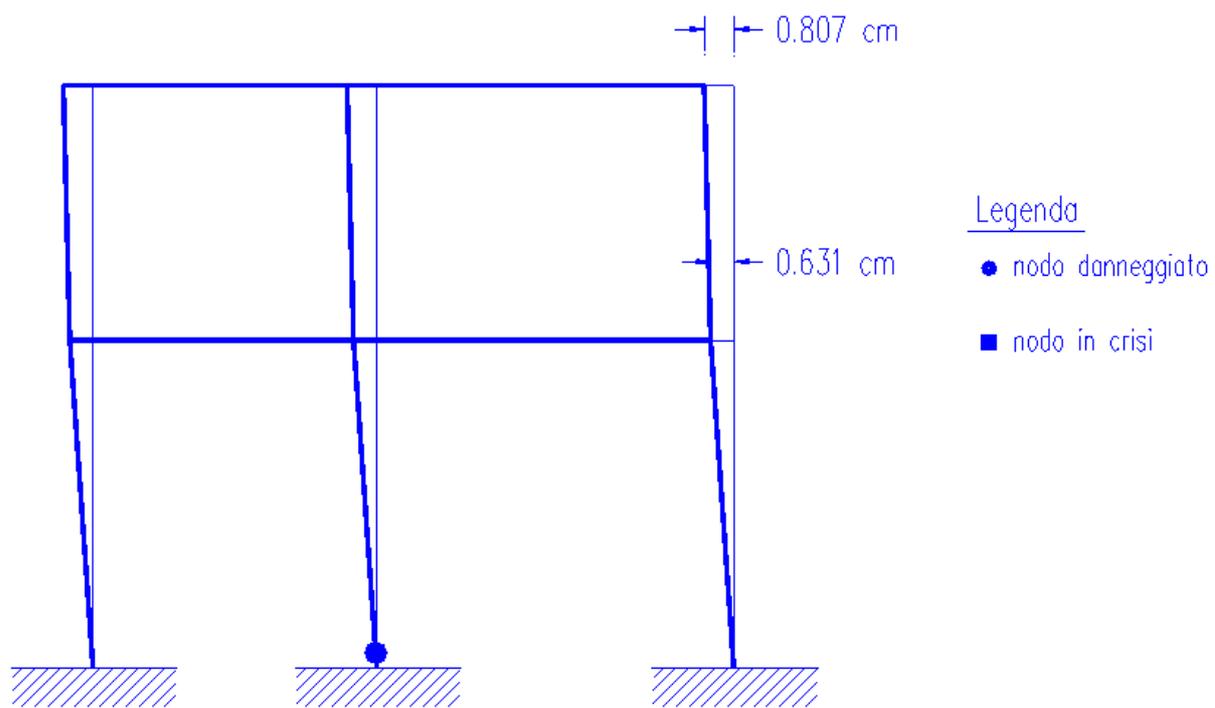


Figura 7.19 - Spostamenti lungo x e danneggiamento, ( $t = 3.00$  sec.)

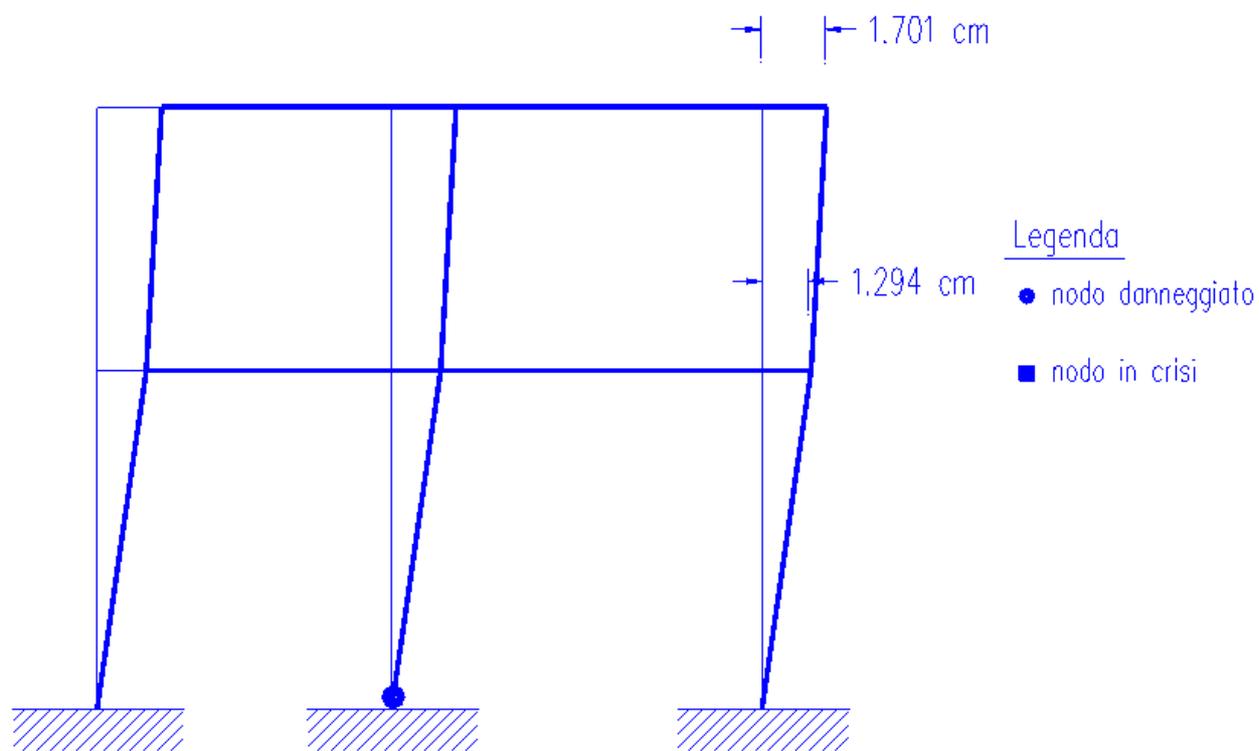


Figura 7.20 - Spostamenti lungo x e danneggiamento, ( $t = 3.10$  sec.)

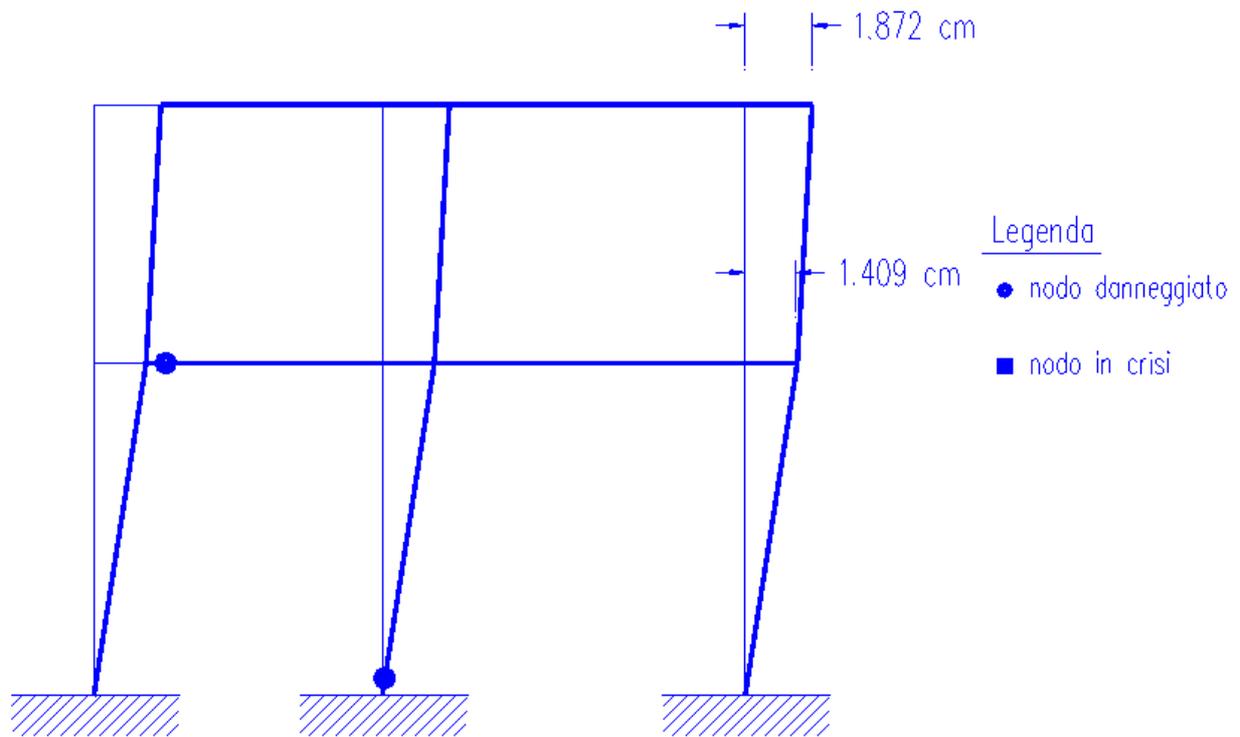


Figura 7.21 - Spostamenti lungo x e danneggiamento, ( $t = 3.11$  sec.)

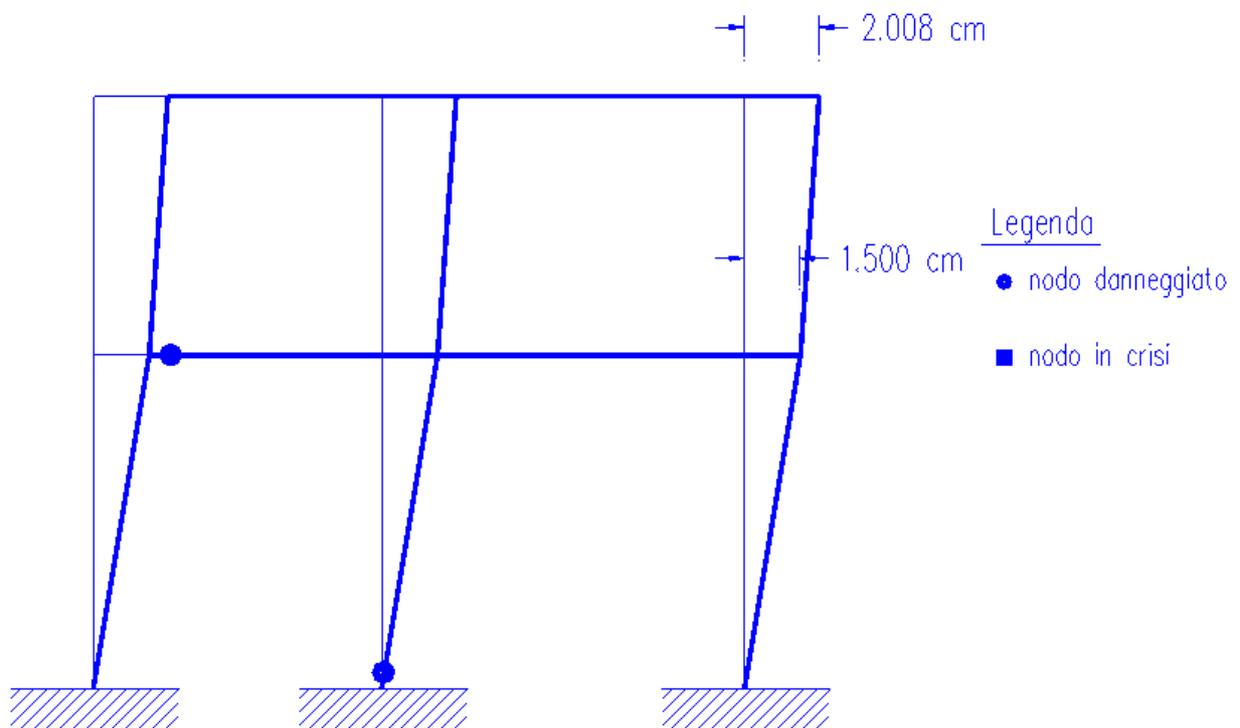


Figura 7.22 - Spostamenti lungo x e danneggiamento, ( $t = 3.12$  sec.)

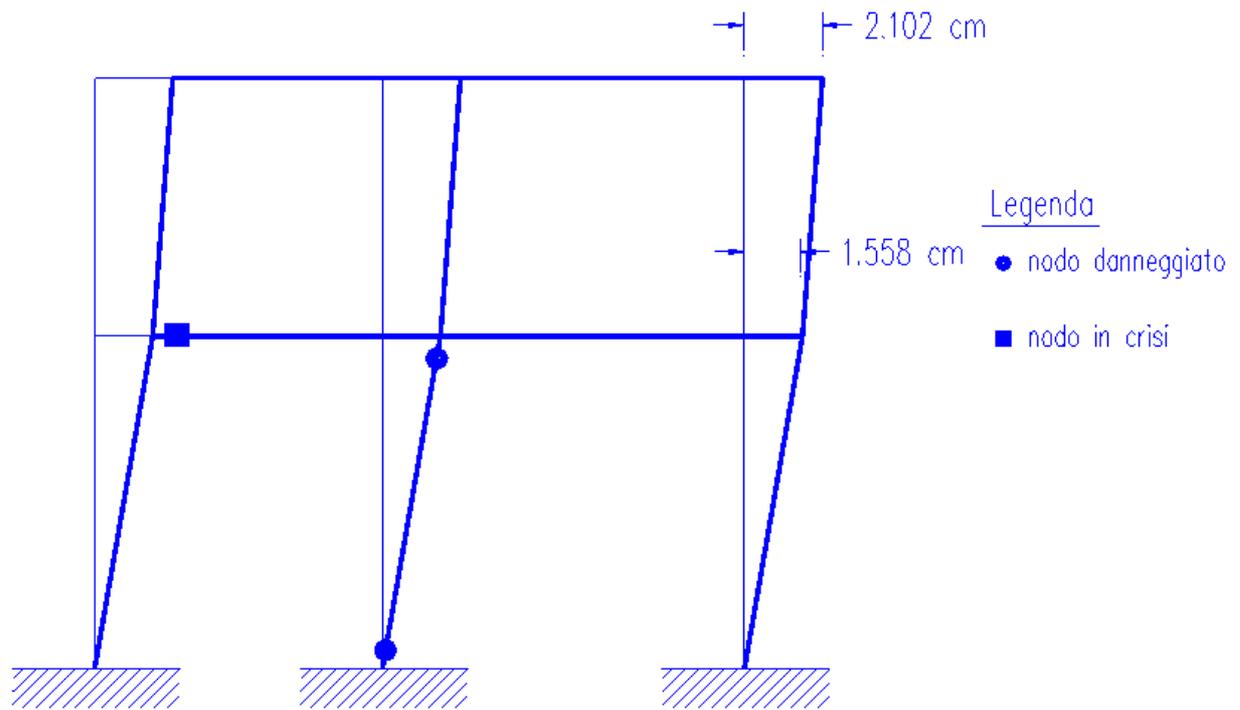


Figura 7.23 - Spostamenti lungo x e danneggiamento, ( $t = 3.13$  sec.)

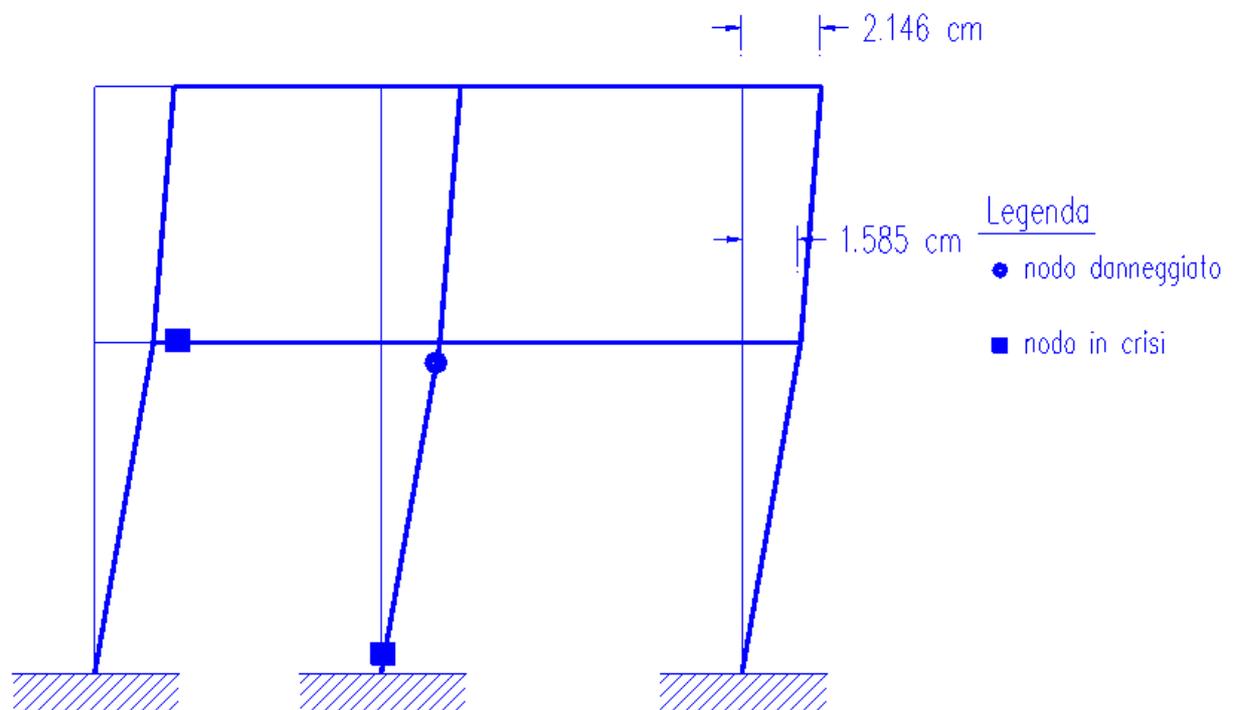


Figura 7.24 - Spostamenti lungo x e danneggiamento, ( $t = 3.14$  sec.)

### 7.2.2. Esempio 2.2

**Analisi probabilistica del telaio prima considerato, sottoposto successivamente e separatamente all'azione di 10 terremoti generati artificialmente**

Il file "data" per questa analisi è riportato nella Tabella 7.11.

Il codice DADRA ha provveduto a generare una famiglia di dieci terremoti artificiali, basata sugli stessi dati già utilizzati nell'esempio 7.1, (cfr. tabella 7.4). I risultati ottenuti, anche in questo caso, mostrano che, in alcuni concetti critici è sopravvenuta la condizione di crisi nel corso del sisma considerato.

In figura 7.25 viene riportata la storia nel tempo degli indici di danneggiamento, con riferimento al concio 2 dell'elemento 2, per alcuni degli accelerogrammi generati artificialmente.

Nelle Tabelle 7.12, 7.13 e 7.14 sono riportati i valori statistici degli indici di danneggiamento che sono stati presi in considerazione nel presente lavoro, valutati rispettivamente negli istanti  $t=10\text{sec.}$ ,  $t=15\text{sec.}$  e  $t=17\text{sec.}$  Infine, nella figura 7.26 si

mostra il confronto tra i risultati ottenuti dall'analisi deterministica e quelli derivanti dall'analisi probabilistica, relativamente all'indice di danneggiamento di Park ed Ang nel concio 2 dell'elemento 2.

**TABELLA 7.11 - ESEMPIO 2.2 - TELAIO IN C.A.**

**ANALISI PROBABILISTICA - FILE "DATA"**

```

START      ESEMPIO 2.2 - TELAIO A 2 PIANI E 2 CAMPATE
9,6,3,1,0,4,1,0,0,0
1,0.0,0.0
2,387.0,0.0
3,874.0,0.0
7,0.0,800.0
8,387.0,800.0
9,874.0,800.0
1,7,1,3,450
2,8,1,3,450
3,9,1,3,450
1,1,1,1,3,1
4,4.6,4.6,0.,5,1,1.
5,3.25,3.25,0.,6,1,1.
7,3.45,3.45,0.,8,1,1.
8,2.8,2.8,0.,9,1,1.
0,0,1700,0.01,1.,1,1,1,1.E6,1
-1,0,0,0,0,1
0.075,0.,0.,0.
100,100,0,6,6,6,0,0,1,0,1,0,0,0
4,5,6,7,8,9
4,5,6,7,8,9
4,5,6,7,8,9
6,10,2,1,10,0,0,0,0,0
1,94409282070.,512861650.,0.,4.,4.,2.,0.005,0.005
1,94409282070.,94409282070.,0.,0.,0.,0.,1.
2,29796898133.,349182400.,0.,4.,4.,2.,0.006,0.006
2,29796898133.,29796898133.,0.,0.,0.,0.,1.
1,17.5,-17.5,0,0
1,871268.,-1010521.,927547.,-1076315.,0.00024,-0.00025,1.1,0.18
2,871268.,-1078784.,927547.,-1149006.,0.00024,-0.00025,1.1,0.18
3,1384858.,-1078784.,1472495.,-1149005.,0.00026,-0.00025,1.1,0.18
4,1384858.,-1010521.,1472495.,-1076315.,0.00026,-0.00025,1.1,0.18
5,1163085.,-1517495.,1238598.,-1611125.,0.00025,-0.00027,1.1,0.2
6,1163085.,-3069057.,1238598.,-3153375.,0.00025,-0.00016,1.1,0.14
7,1261474.,-1261474.,1306847.,-1306847.,0.00026,-0.00026,1.1,0.18
8,913286.,-913286.,962645.,-962645.,0.00038,-0.00038,1.1,0.14
9,1416147.,-3069057.,1505127.,-3153375.,0.00027,-0.00016,1.1,0.14
10,1416147.,-1517495.,1505127.,-1611125.,0.00027,-0.00027,1.1,0.16
1,1,4,1,2,0,7,7,0,1,0,0,1,1,0,1
4,4,7,1,2,0,8,8,0,1,0,0,1,1,0,1
7,4,5,1,1,1,5,6,0,1,0,0,1,1,0,1
8,5,6,1,1,1,9,10,0,1,0,0,1,1,0,1
9,7,8,1,1,1,1,2,0,1,0,0,1,1,0,1
10,8,9,1,1,1,3,4,0,1,0,0,1,1,0,1
STOP

```

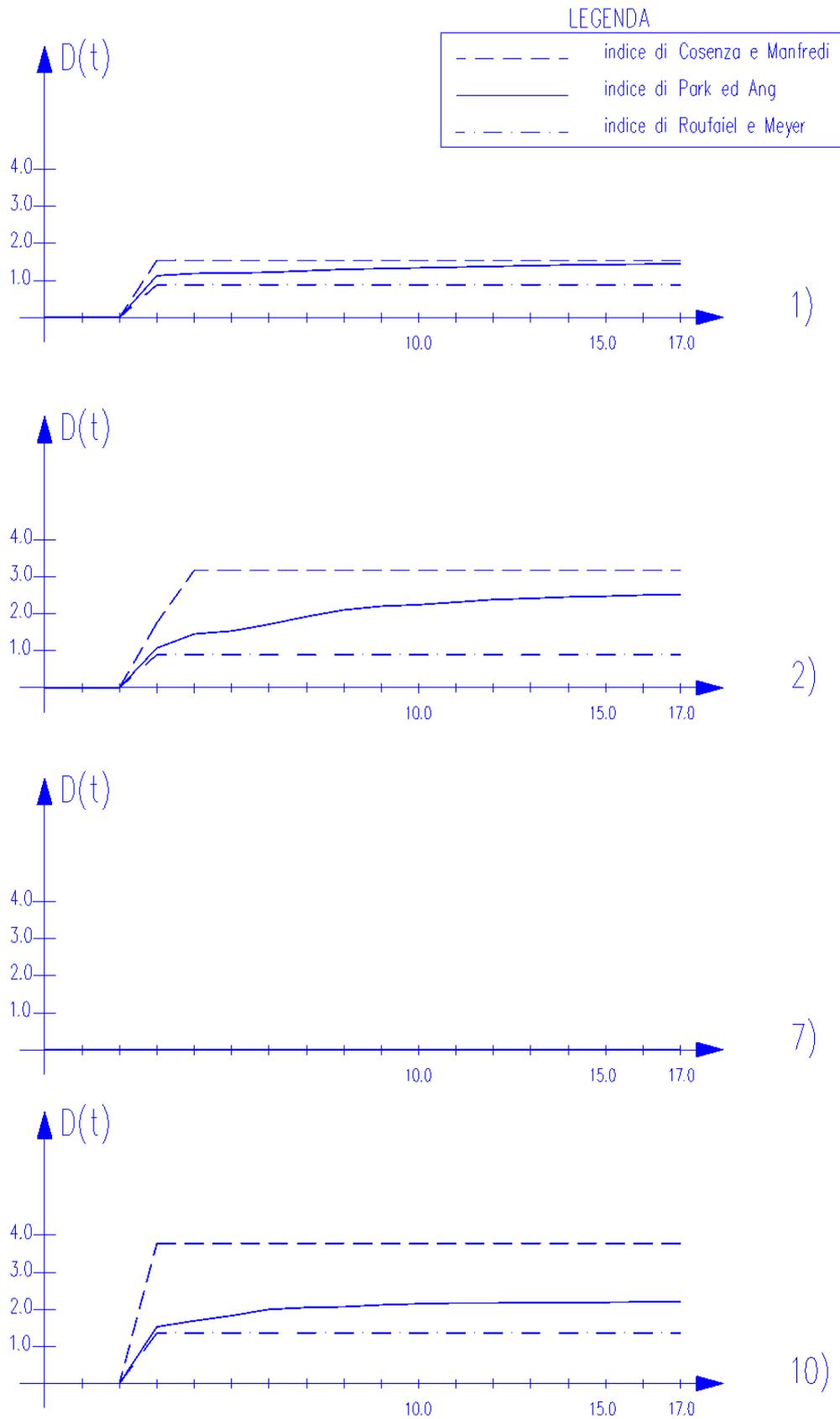


Figura 7.25 - Storia nel tempo degli indici di danneggiamento per alcuni terremoti artificiali, (elemento 2, concio 2)

TABELLA 7.12.a - VALORI STATISTICI DEGLI INDICI DI DANNEGGIAMENTO  
PER T=10.00 SEC.

ELEM. N°	NODO N°		ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
1	1	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	3.08969	3.88142	11.40111
		VAL. MED.	0.63943	0.88145	1.73463
		DEV. STA.	0.91553	1.16876	3.31382
1	4	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.62090	0.82499	0.90675
		VAL. MED.	0.06209	0.08250	0.09068
		DEV. STA.	0.18627	0.24750	0.2703
2	2	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	3.64340	5.20804	19.91407
		VAL. MED.	1.22425	1.92702	4.63549
		DEV. STA.	1.08113	1.57402	5.75210
2	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	3.17663	4.25964	13.64938
		VAL. MED.	0.85608	1.28213	2.63838
		DEV. STA.	0.93371	1.25734	3.95893
3	3	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	2.90720	3.58738	10.00885
		VAL. MED.	0.52197	0.71068	1.36057
		DEV. STA.	0.85819	1.06481	2.93461
3	6	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
4	4	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
4	7	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
5	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
5	8	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000

TABELLA 7.12.b - VALORI STATISTICI DEGLI INDICI DI DANNEGGIAMENTO  
PER T=10.00 SEC.

ELEM. N°	NODO N°		ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
6	6	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
6	9	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
7	4	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	1.28462	2.06426	4.65858
		VAL. MED.	0.31188	0.54710	0.99315
		DEV. STA.	0.48691	0.84088	1.61978
7	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
8	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
8	6	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.43012	0.55333	0.76111
		VAL. MED.	0.04301	0.05533	0.07611
		DEV. STA.	0.12904	0.16600	0.22833
9	7	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
9	8	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
10	8	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
10	9	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000

TABELLA 7.13.a - VALORI STATISTICI DEGLI INDICI DI DANNEGGIAMENTO  
PER T=15.00 SEC.

ELEM. N°	NODO N°		ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
1	1	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	3.08969	3.90362	11.40111
		VAL. MED.	0.63943	0.89365	1.73463
		DEV. STA.	0.91553	1.17804	3.31382
1	4	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.62090	0.82867	0.90675
		VAL. MED.	0.06209	0.08287	0.09068
		DEV. STA.	0.18627	0.24860	0.27203
2	2	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	3.64340	5.25123	19.91407
		VAL. MED.	1.22425	1.98835	4.63549
		DEV. STA.	1.08113	1.59663	5.75210
2	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	3.17663	4.29097	13.64938
		VAL. MED.	0.85608	1.31085	2.63838
		DEV. STA.	0.93371	1.26736	3.95893
3	3	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	2.90720	3.60520	10.00885
		VAL. MED.	0.52197	0.71844	1.36057
		DEV. STA.	0.85819	1.07098	2.93461
3	6	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
4	4	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
4	7	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
5	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
5	8	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000

TABELLA 7.13.b - VALORI STATISTICI DEGLI INDICI DI DANNEGGIAMENTO  
PER T= 15.00 SEC.

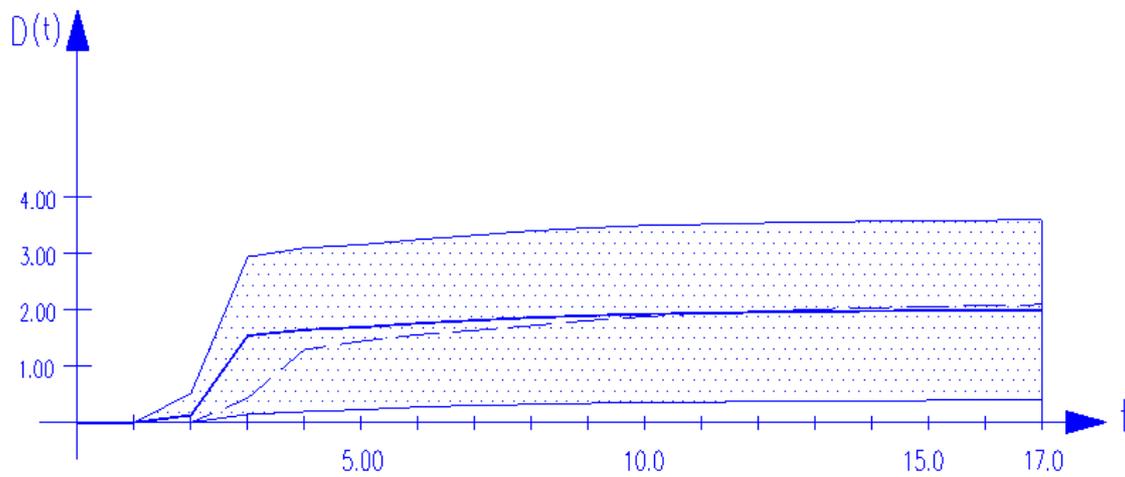
ELEM. N°	NODO N°		ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
6	6	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
6	9	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
7	4	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	1.28462	2.08375	4.65858
		VAL. MED.	0.31188	0.56591	0.99315
		DEV. STA.	0.48691	0.86830	1.61978
7	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
8	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
8	6	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.43012	0.55563	0.76111
		VAL. MED.	0.04301	0.05556	0.07611
		DEV. STA.	0.12904	0.16669	0.22833
9	7	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
9	8	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
10	8	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
10	9	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000

TABELLA 7.14.a - VALORI STATISTICI DEGLI INDICI DI DANNEGGIAMENTO  
PER T= 17.00 SEC.

ELEM. N°	NODO N°		ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
1	1	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	3.08969	3.90526	11.40111
		VAL. MED.	0.63943	0.89601	1.73463
		DEV. STA.	0.91553	1.17927	3.31382
1	4	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.62090	0.82897	0.90675
		VAL. MED.	0.06209	0.08290	0.09068
		DEV. STA.	0.18627	0.24869	0.27203
2	2	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	3.64340	5.25635	19.91407
		VAL. MED.	1.22425	2.00116	4.63549
		DEV. STA.	1.08113	1.60068	5.75210
2	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	3.17663	4.29343	13.64938
		VAL. MED.	0.85608	1.31668	2.63838
		DEV. STA.	0.93371	1.26846	3.95893
3	3	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	2.90720	3.60642	10.00885
		VAL. MED.	0.52197	0.71990	1.36057
		DEV. STA.	0.85819	1.07161	2.93461
3	6	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
4	4	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
4	7	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
5	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
5	8	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000

TABELLA 7.14.b - VALORI STATISTICI DEGLI INDICI DI DANNEGGIAMENTO  
PER T=17.00 SEC.

ELEM. N°	NODO N°		ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFREDI
6	6	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
6	9	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
7	4	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	1.28462	2.08690	4.65858
		VAL. MED.	0.31188	0.56949	0.99315
		DEV. STA.	0.48691	0.87366	1.61978
7	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
8	5	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
8	6	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.43012	0.55580	0.76111
		VAL. MED.	0.04301	0.05558	0.07611
		DEV. STA.	0.12904	0.16674	0.22833
9	7	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
9	8	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
10	8	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000
10	9	VAL. MIN.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX.	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MED.	0.00000	0.00000	0.00000
		DEV. STA.	0.00000	0.00000	0.00000



LEGENDA

Analisi deterministico	— — — — —	$D(t)$ : Storia nel tempo dell'indice di danno
Analisi probabilistico	— — — — —	$\bar{D}(t)$ : Storia nel tempo dell'indice di danno medio
		$\bar{D}(t) - \alpha(t) \leq D(t) \leq \bar{D}(t) + \alpha(t)$

Figura 7.26 - Indici di danneggiamento di Park ed Ang, (elemento 2, concio 2)

### 7.3 Struttura n. 3- Telaio in c.a. a cinque piani e due campate

Lo schema della struttura è riportato in figura 7.27. La geometria delle sezioni e le relative armature, riferite a tutti gli elementi, sono specificate nella Tabella 7.15.

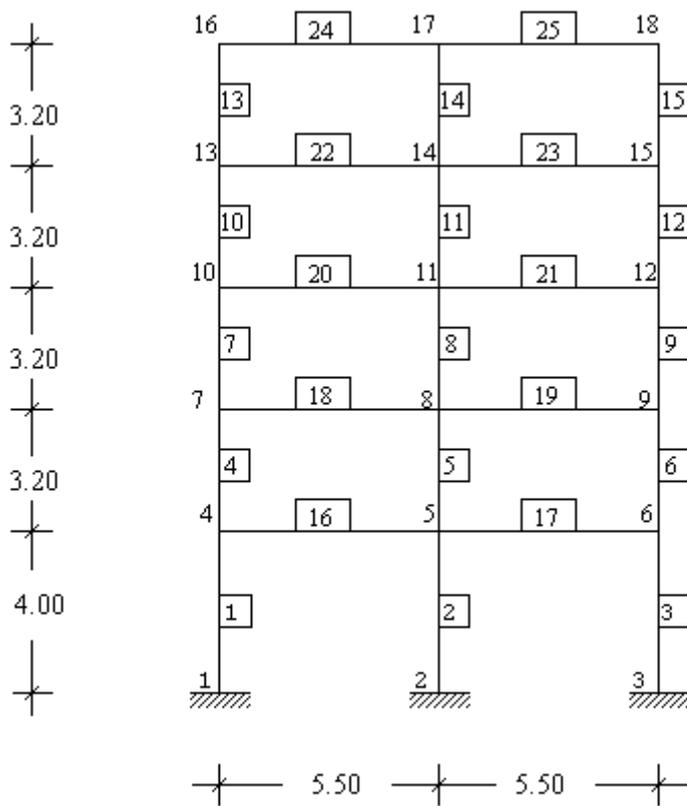


Figura 7.27 - Struttura n. 3 - Telaio in c.a.

**TABELLA 7.15 - CARATTERISTICHE DELLA STRUTTURA**

elemento strutturale (n°)	PROPRIETA' DELLE SEZIONI			
	base (cm)	altezza (cm)	armatura superiore	armatura inferiore
1,3	30	80	4 $\phi$ 20	4 $\phi$ 20
2	30	80	7 $\phi$ 20	7 $\phi$ 20
4,6,8	30	70	4 $\phi$ 20	4 $\phi$ 20
5	30	70	7 $\phi$ 20	7 $\phi$ 20
7,9,10÷15	30	70	2 $\phi$ 20+1 $\phi$ 14	2 $\phi$ 20+1 $\phi$ 14
16,17	30	70	5 $\phi$ 20+1 $\phi$ 14	3 $\phi$ 20+2 $\phi$ 14
18,19	30	60	5 $\phi$ 20+1 $\phi$ 14	3 $\phi$ 20+1 $\phi$ 14
20,21	30	60	5 $\phi$ 20	3 $\phi$ 20
22,23	30	60	3 $\phi$ 20+1 $\phi$ 14	4 $\phi$ 14
24,25	30	60	4 $\phi$ 14	3 $\phi$ 14

Le proprietà meccaniche dei materiali sono le seguenti

- conglomerato classe  $R_{ck}=250 \text{ Kg/cm}^2$ ;
- acciaio tipo  $F_{eb}38K$ , c.s.

### 7.3.1 Esempio 3.1

#### **Analisi deterministica. Sisma di Tolmezzo, 1976.**

Il file "data" necessario per questo esempio è riportato nella tabella 7.16. E' stata effettuata una prima analisi sottoponendo la struttura al terremoto registrato a Tolmezzo - comp. EW, il 06/05/1976 alle ore 20:00:13, ed una seconda analisi sottoponendo la stessa struttura ad un terremoto fittizio, simile al precedente ma con le intensità amplificate del 30%.

Nelle figure 7.28 e 7.29 si mostrano i risultati ottenuti, avendo indicato come di consueto, con i simboli "✱", "■" le sezioni in cui, all'istante finale, l'indice di danno di Park ed Ang assume rispettivamente valori compresi tra zero e uno, (formazione di cerniera plastica), e valori maggiori di uno, (crisi nel concio).

**TABELLA 7.16-ESEMPIO 3.1 - TELAIO A 5 PIANI. SISMA DI TOLMEZZO, 1976**  
**ANALISI DETERMINISTICA - FILE "DATA"**

START            TELAIO A 5 PIANI E 2 CAMPATE  
18,9,3,1,0,5,1,0,0,0  
1,0.,0.  
2,550.,0.  
3,1100.,0.  
4,0.,400.  
5,550.,400.  
6,1100.,400.  
16,0.,1680.  
17,550.,1680.  
18,1100.,1680.  
4,16,3,3,320.  
5,17,3,3,320.  
6,18,3,3,320.  
1,1,1,1,3,1  
7,1237.5,1237.5,0,16,3,980.  
8,2475.,2475.,0,17,3,980.  
9,1237.5,1237.5,0,18,3,980.  
4,1443.75,1443.75,0,6,2,980.  
5,2887.5,2887.5,0,0,0,980.  
0,0,3000,0.01,1.3,1,1,1,0,1  
-2,0,0,0,0,0,0  
0.05,0,0,0  
1000,1000,0,7,7,7,0,0,1,0,1,0,0,0  
4,7,10,13,16,17,18  
4,7,10,13,16,17,18  
4,7,10,13,16,17,18  
6,25,3,0,10,0,0,0,0,0  
1,324828936162.,657437550.,0,4.,4.,2.,0.005,0.005  
1,324828936162.,324828936162.,0,0,0,0,1.  
2,213996634037.,572056050.,0,4.,4.,2.,0.003,0.003  
2,213996634037.,213996634037.,0,0,0,0,1.  
3,131767134412.,486674550.,0,4.,4.,2.,0.003,0.003  
3,131767134412.,131767134412.,0,0,0,0,1.  
1,4589195.,-4589195.,4793266.,-4793266.,0.000128,-0.000128,1.5,0.18  
2,3923567.,-3923567.,4067266.,-4067266.,0.000128,-0.000128,1.5,0.18  
3,2760708.,-2760708.,2933873.,-2933873.,0.000163,-0.000163,1.5,0.18  
4,2376216.,-2376216.,2519063.,-2519063.,0.000195,-0.000195,1.5,0.18  
5,1711122.,-1711122.,1822012.,-1822012.,0.000180,-0.000180,1.5,0.18  
6,2365795.,-3167162.,2508275.,-3324021.,0.000195,-0.000163,1.5,0.18  
7,1760532.,-2645358.,1865308.,-2754771.,0.000230,-0.000163,1.5,0.18  
8,1531606.,-2435864.,1627363.,-2548674.,0.000220,-0.000179,1.5,0.18  
9,1029258.,-1760532.,1096217.,-1865308.,0.000210,-0.000230,1.5,0.18  
10,784172.,-1029258.,833877.,-1096217.,0.000195,-0.000210,1.5,0.18  
1,1,4,0,1,0,3,3,0,1,0,0,1,1,0,1  
2,2,5,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1  
3,3,6,0,1,0,3,3,0,1,0,0,1,1,0,1  
4,4,7,0,2,0,4,4,0,1,0,0,1,1,0,1  
5,5,8,0,2,0,2,2,0,1,0,0,1,1,0,1  
6,6,9,0,2,0,4,4,0,1,0,0,1,1,0,1  
7,7,10,0,2,0,5,5,0,1,0,0,1,1,0,1  
8,8,11,0,2,0,4,4,0,1,0,0,1,1,0,1  
9,9,12,1,2,0,5,5,0,1,0,0,1,1,0,1  
15,15,18,0,2,0,5,5,0,1,0,0,1,1,0,1  
16,4,5,0,2,0,6,6,0,1,0,0,1,1,0,1  
17,5,6,0,2,0,6,6,0,1,0,0,1,1,0,1  
18,7,8,0,3,0,7,7,0,1,0,0,1,1,0,1  
20,10,11,0,3,0,8,8,0,1,0,0,1,1,0,1  
22,13,14,0,3,0,9,9,0,1,0,0,1,1,0,1  
23,14,15,0,3,0,9,9,0,1,0,0,1,1,0,1  
24,16,17,0,3,0,10,10,0,1,0,0,1,1,0,1  
25,17,18,0,3,0,10,10,0,1,0,0,1,1,0,1

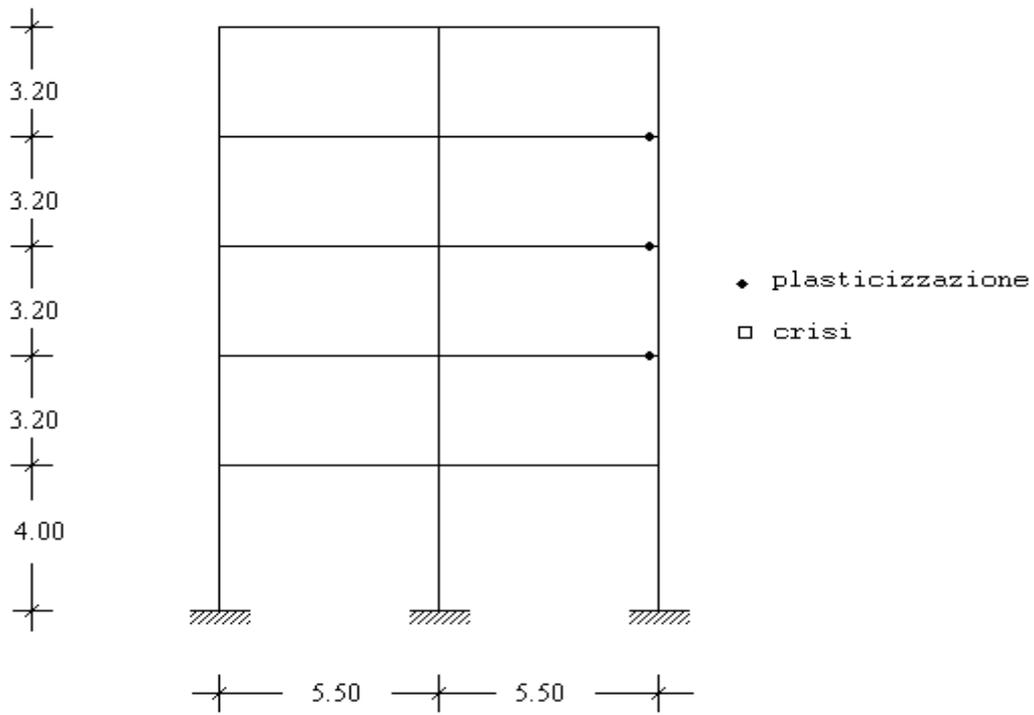


Figura 7.28 - Indice di danno di Park & Ang - Sisma di Tolmezzo, comp. EW - registrazione del 06/05/1976

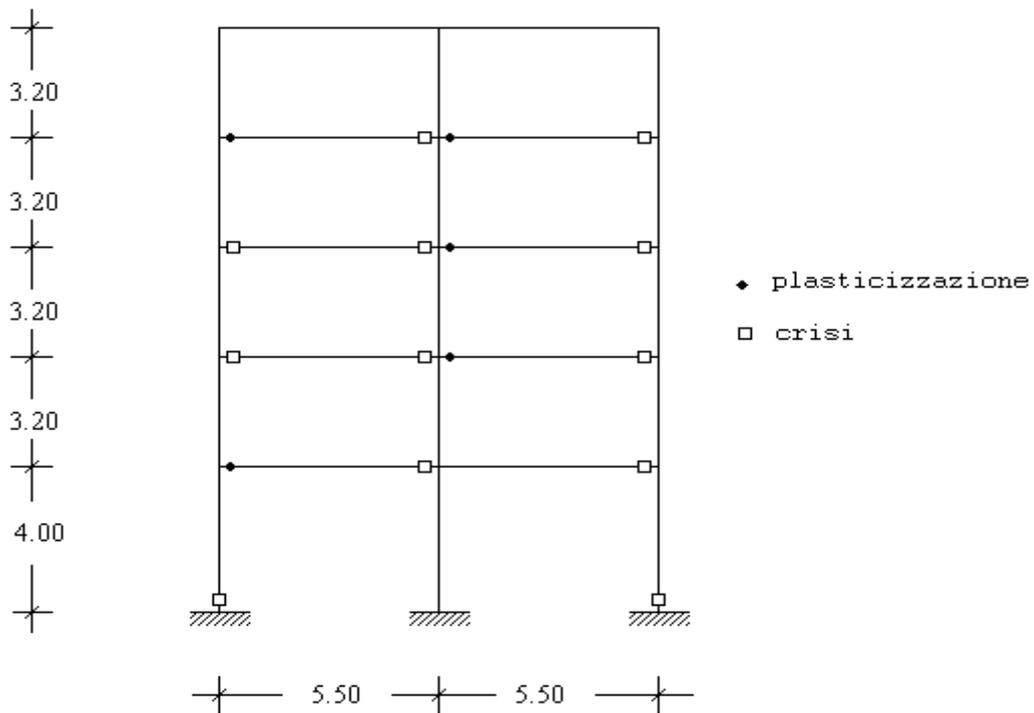


Figura 7.29 - Indice di danno di Park & Ang, Sisma di Tolmezzo, (1976), intensità amplificate del 30%

### 7.3.2 Esempio 3.2

**Analisi probabilistica del telaio a 5 piani prima considerato sottoposto successivamente e separatamente all'azione di cento terremoti generati artificialmente**

Il file "data" per poter effettuare un'indagine in ambito probabilistico è riportato in Tabella 7.17. Lo stesso telaio viene successivamente e di volta in volta sottoposto ai terremoti appartenenti alla famiglia di cento campioni, generata artificialmente sulla base dei dati riportati nella Tabella 7.18.

Nella Tabella 7.19 sono raccolti i risultati ottenuti effettuando tale analisi. In particolare sono mostrati i valori minimo, massimo, medio e deviazione standard degli indici di danneggiamento non nulli nell'istante finale del processo di caricamento, che si pone nell'istante  $t=30.0$  sec.

Nella Figura 7.31 vengono altresì mostrati gli indici di danno di Park & Ang, ottenuti per ciascuno degli accelerogrammi artificiali predetti, relativamente al nodo 1 dell'elemento 1. Nella Figura 7.32,

si riporta il corrispondente istogramma delle frequenze relative e nella Figura 7.33 si riporta l'istogramma delle frequenze relative che si ottiene escludendo i casi in cui la struttura, sotto l'azione del sisma considerato, permane in campo elastico.

Dall'analisi di tali risultati è possibile osservare quanto appresso.

Si definiscono preliminarmente gli eventi:

- A - l'indice di danno assume valore nullo, ossia, nel concio non si hanno deformazioni plastiche;
- B - l'indice di danno assume valori compresi tra zero e uno, ossia, nel concio non si raggiunge la crisi;
- C - l'indice di danno assume valori maggiori di zero ( $C=\Omega-A$ ).

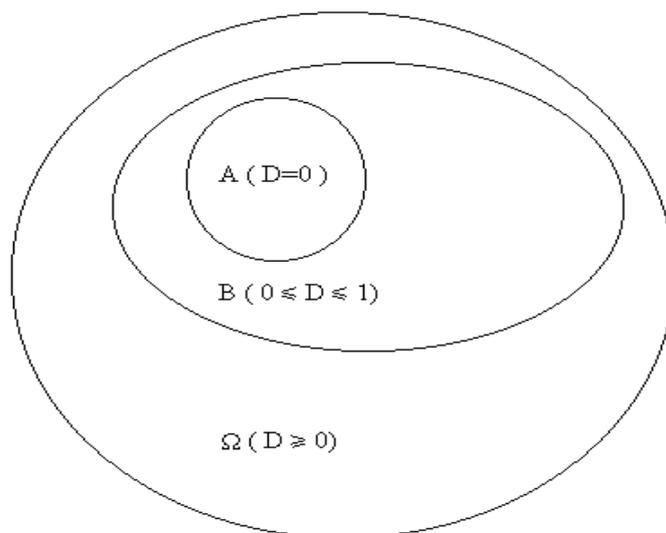


Figura 7.30 - Diagramma di Venn

Se si indica con  $P(E)$  il rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili per il generico evento  $E$ , risulta, nel caso in esame, ed in una visione meramente laplaciana della probabilità:

$$P(A)=0.55 \quad P(B)=0.87 \quad P(C)=P(\Omega-A)=1-P(A)=0.45.$$

Inoltre, sulla base della definizione di probabilità condizionata di due eventi, (cfr. A.15), la probabilità che si abbia un indice di danno minore di uno posto che per lo stesso si siano verificati valori maggiori di zero, viene fornita dalla relazione

$$P(B|C) = P[B|(\Omega - A)] = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B-A)}{P(C)} = \frac{0.32}{0.45} = 0.71$$

In coerenza con quanto sopra specificato, nelle figure 7.34, 7.35 e 7.36 si riportano i risultati ottenuti relativamente al nodo 15 dell'elemento 23. Per questo caso risulta, ad es.:

$$P(A)=0.42 \quad P(B)=0.64 \quad P(C)=P(\Omega-A)=1-P(A)=0.58$$

$$P(B|C) = P[B|(\Omega - A)] = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B-A)}{P(C)} = \frac{0.22}{0.58} = 0.38$$

Nelle figure 7.37, 7.38, 7.39 e 7.40 vengono riportati rispettivamente i valori dell'indice di danno medio di Park ed Ang, nonché i valori di  $P(A)$ , di  $P(B)$  ed i valori di  $P(B|C)$ , valutati in corrispondenza di ogni nodo.

Si osservi che per tutte le cento analisi svolte si è verificato che, in alcuni nodi non sono state raggiunte deformazioni plastiche, e, in conseguenza, è risultato  $D=0$ . In tali nodi, essendo  $A \equiv B \equiv \Omega$ , risulta

$$P(A) = P(B) = 1$$

$$P(C) = 1 - P(A) = 0$$

per cui perde significato la valutazione della probabilità condizionata  $P(B|C)$ , in quanto essa presuppone che si sia verificato l'evento  $C$ , ( $P(C) > 0$ ).

Infine, nelle figure 7.41 ÷ 7.44 sono mostrati i grafici di alcuni degli accelerogrammi generati artificialmente, sulla base dei dati già prefissati nella tabella 7.18.

**TABELLA 7.17 ESEMPIO 3.2 - TELAIO A 5 PIANI  
ANALISI PROBABILISTICA - FILE "DATA"**

START TELAI0 A 5 PIANI E 2 CAMPATE

18,9,3,1,0,5,1,0,0,0  
1,0.,0.  
2,550.,0.  
3,1100.,0.  
4,0.,400.  
5,550.,400.  
6,1100.,400.  
16,0.,1680.  
17,550.,1680.  
18,1100.,1680.  
4,16,3,3,320.  
5,17,3,3,320.  
6,18,3,3,320.  
1,1,1,1,3,1  
7,1237.5,1237.5,0,16,3,980.  
8,2475.,2475.,0,17,3,980.  
9,1237.5,1237.5,0,18,3,980.  
4,1443.75,1443.75,0,6,2,980.  
5,2887.5,2887.5,0,0,0,980.  
0,0,3000,0.01,1.3,1,1,1,0,1  
-1,0,0,0,0,0  
0.05,0,0,0  
1000,1000,0,7,7,7,0,0,1,0,1,0,0,0  
4,7,10,13,16,17,18  
4,7,10,13,16,17,18  
4,7,10,13,16,17,18  
6,25,3,0,10,0,0,0,0,0  
1,324828936162.,657437550.,0,4.,4.,2.,0.005,0.005  
1,324828936162.,324828936162.,0,0,0,0,1.  
2,213996634037.,572056050.,0,4.,4.,2.,0.003,0.003  
2,213996634037.,213996634037.,0,0,0,0,1.  
3,131767134412.,486674550.,0,4.,4.,2.,0.003,0.003  
3,131767134412.,131767134412.,0,0,0,0,1.  
1,4589195.,-4589195.,4793266.,-4793266.,0.000128,-0.000128,1.5,0.18  
2,3923567.,-3923567.,4067266.,-4067266.,0.000128,-0.000128,1.5,0.18  
3,2760708.,-2760708.,2933873.,-2933873.,0.000163,-0.000163,1.5,0.18  
4,2376216.,-2376216.,2519063.,-2519063.,0.000195,-0.000195,1.5,0.18  
5,1711122.,-1711122.,1822012.,-1822012.,0.000180,-0.000180,1.5,0.18  
6,2365795.,-3167162.,2508275.,-3324021.,0.000195,-0.000163,1.5,0.18  
7,1760532.,-2645358.,1865308.,-2754771.,0.000230,-0.000163,1.5,0.18  
8,1531606.,-2435864.,1627363.,-2548674.,0.000220,-0.000179,1.5,0.18  
9,1029258.,-1760532.,1096217.,-1865308.,0.000210,-0.000230,1.5,0.18  
10,784172.,-1029258.,833877.,-1096217.,0.000195,-0.000210,1.5,0.18  
1,1,4,0,1,0,3,3,0,1,0,0,1,1,0,1  
2,2,5,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1  
3,3,6,0,1,0,3,3,0,1,0,0,1,1,0,1  
4,4,7,0,2,0,4,4,0,1,0,0,1,1,0,1  
5,5,8,0,2,0,2,2,0,1,0,0,1,1,0,1  
6,6,9,0,2,0,4,4,0,1,0,0,1,1,0,1  
7,7,10,0,2,0,5,5,0,1,0,0,1,1,0,1  
8,8,11,0,2,0,4,4,0,1,0,0,1,1,0,1  
9,9,12,1,2,0,5,5,0,1,0,0,1,1,0,1  
15,15,18,0,2,0,5,5,0,1,0,0,1,1,0,1  
16,4,5,0,2,0,6,6,0,1,0,0,1,1,0,1  
17,5,6,0,2,0,6,6,0,1,0,0,1,1,0,1  
18,7,8,0,3,0,7,7,0,1,0,0,1,1,0,1  
20,10,11,0,3,0,8,8,0,1,0,0,1,1,0,1  
22,13,14,0,3,0,9,9,0,1,0,0,1,1,0,1  
23,14,15,0,3,0,9,9,0,1,0,0,1,1,0,1  
24,16,17,0,3,0,10,10,0,1,0,0,1,1,0,1  
25,17,18,0,3,0,10,10,0,1,0,0,1,1,0,1

**TABELLA 7.18 - PARAMETRI DA PORRE A BASE DEL PROCESSO DI  
GENERAZIONE DEI TERREMOTI ARTIFICIALI**

Numero di accelerogrammi da generare artificialmente	= 100
Valore di picco dell'accelerazione, (cm/sec <sup>2</sup> )	= 314
Interv. di tempo agli estremi del quale viene calcolata l'accelerazione (sec)	= 0.01
Numero di intervalli	= 3000
Frequenza cut-off, (Hz)	= 50
Coefficiente di smorzamento predominante	= 0.6
Frequenza caratteristica, (Hz)	= 15.6
Coefficiente alfa della funzione inviluppo	= 0.25
Coefficiente beta della funzione inviluppo	= 0.8

TAB. 7.19a - VALORI STATISTICI DEGLI INDICI DI DANNEGGIAMENTO  
 ISTANTE T = 30.0 SEC.

ELEM. N.	NODO N.		ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFR.
1	1	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	1.10047	2.19399	4.11424
		VAL. MED	0.18137	0.39303	0.29240
		DEV. STA	0.28102	0.59218	0.67100
3	3	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	1.16216	2.17206	4.23099
		VAL. MED	0.17928	0.39010	0.29528
		DEV. STA	0.28066	0.59043	0.69060
11	14	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	0.73131	1.14129	1.08497
		VAL. MED	0.03081	0.05181	0.03242
		DEV. STA	0.12184	0.19668	0.16055
16	4	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	1.56353	2.27887	4.26675
		VAL. MED	0.14484	0.23957	0.22860
		DEV. STA	0.34321	0.53508	0.70579
16	5	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	1.04236	1.44701	1.46474
		VAL. MED	0.03206	0.04944	0.03683
		DEV. STA	0.14572	0.21147	0.19428
17	5	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	0.97284	1.38014	1.74885
		VAL. MED	0.04945	0.07310	0.05745
		DEV. STA	0.17770	0.25424	0.24491
17	6	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	1.65475	2.44988	3.67170
		VAL. MED	0.17828	0.30067	0.23280
		DEV. STA	0.32430	0.52224	0.61435
18	7	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	2.42427	3.87231	10.41331
		VAL. MED	0.43523	0.80310	0.94561
		DEV. STA	0.59564	1.00994	1.89349
18	8	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	2.04731	3.48293	5.86385
		VAL. MED	0.36669	0.63138	0.64551
		DEV. STA	0.50531	0.83464	1.18353
19	8	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	2.05457	3.11699	7.27553
		VAL. MED	0.27173	0.46029	0.52290
		DEV. STA	0.48087	0.76785	1.26083

TAB. 7.19b - VALORI STATISTICI DEGLI INDICI DI DANNEGGIAMENTO  
 ISTANTE T = 30.0 SEC.

ELEM. N.	NODO N.		ROUF. & MEYER	PARK & ANG	COS. & MANFR.
19	9	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	2.45416	4.49591	8.89576
		VAL. MED	0.56548	1.06367	1.21160
		DEV. STA	0.64261	1.14620	1.85006
20	10	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	2.37238	3.59507	8.52823
		VAL. MED	0.35517	0.64388	0.68507
		DEV. STA	0.52657	0.88541	1.46792
20	11	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	1.77821	3.26882	4.80696
		VAL. MED	0.28337	0.47627	0.43474
		DEV. STA	0.42340	0.69463	0.85874
21	11	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	1.94149	2.79130	5.72072
		VAL. MED	0.20740	0.34629	0.34425
		DEV. STA	0.41042	0.64338	0.93222
21	12	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	2.19410	4.30309	7.18004
		VAL. MED	0.46988	0.86689	0.91196
		DEV. STA	0.55881	0.98757	1.44113
22	13	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	1.85637	2.96040	5.10227
		VAL. MED	0.28656	0.54105	0.48783
		DEV. STA	0.39220	0.68987	0.97498
22	14	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	1.43629	2.78923	3.79612
		VAL. MED	0.25929	0.46442	0.40305
		DEV. STA	0.34877	0.62523	0.73725
23	14	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	1.45234	2.19726	3.38551
		VAL. MED	0.19048	0.33606	0.27884
		DEV. STA	0.31921	0.53126	0.64833
23	15	VAL. MIN	0.00000	0.00000	0.00000
		VAL. MAX	1.64967	3.39145	4.72943
		VAL. MED	0.37314	0.72210	0.66572
		DEV. STA	0.42375	0.80898	1.02170

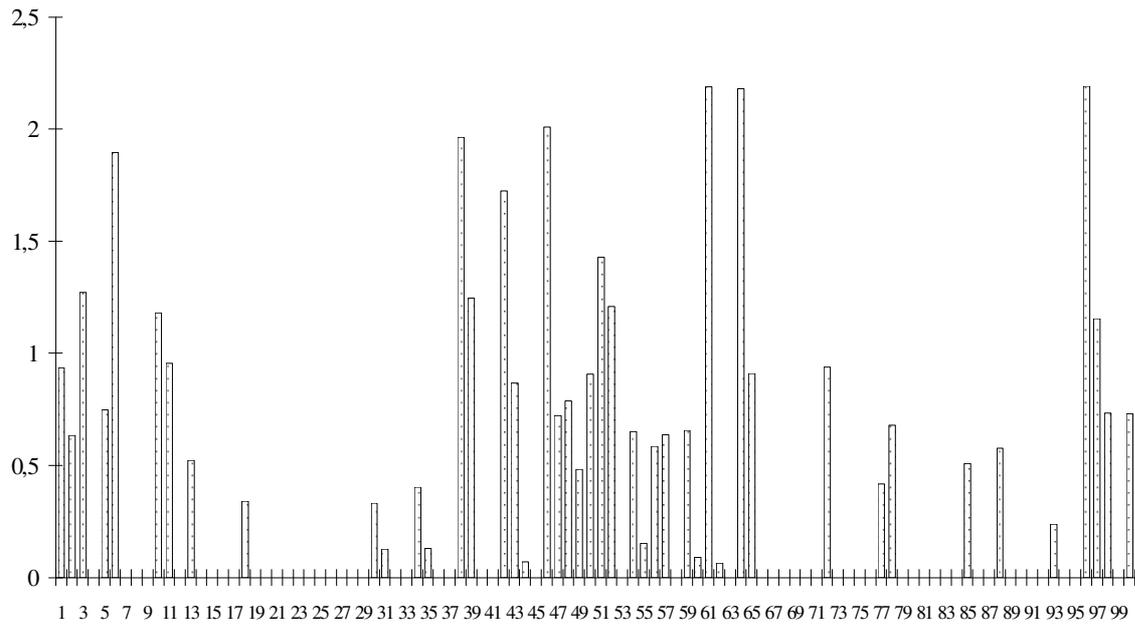


Figura 7.31 - Elemento 1, nodo 1 - Indice di danno di Park ed Ang

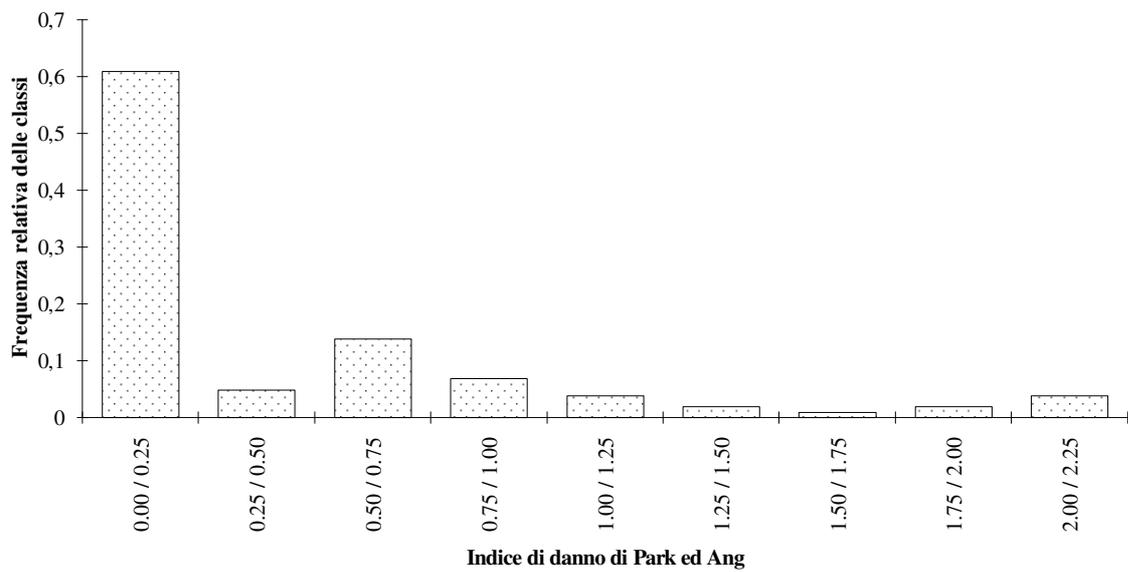


Figura 7.32 - Elemento 1, nodo 1 - Istogramma delle frequenze relative

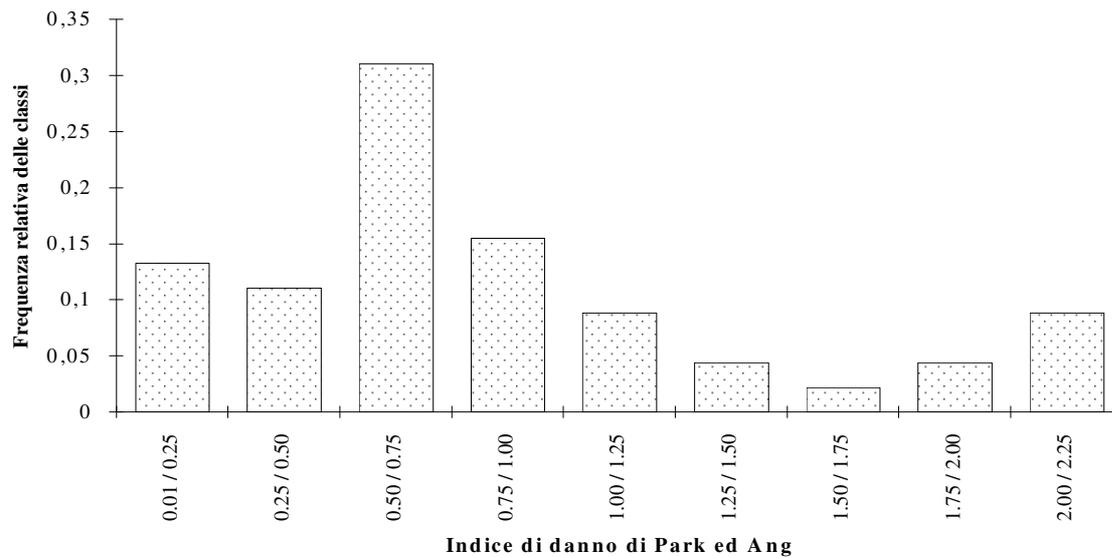


Figura 7.33-Elemento 1, nodo 1 - Istogramma delle frequenze relative (Non considerando i casi in cui la struttura permane in campo elastico)

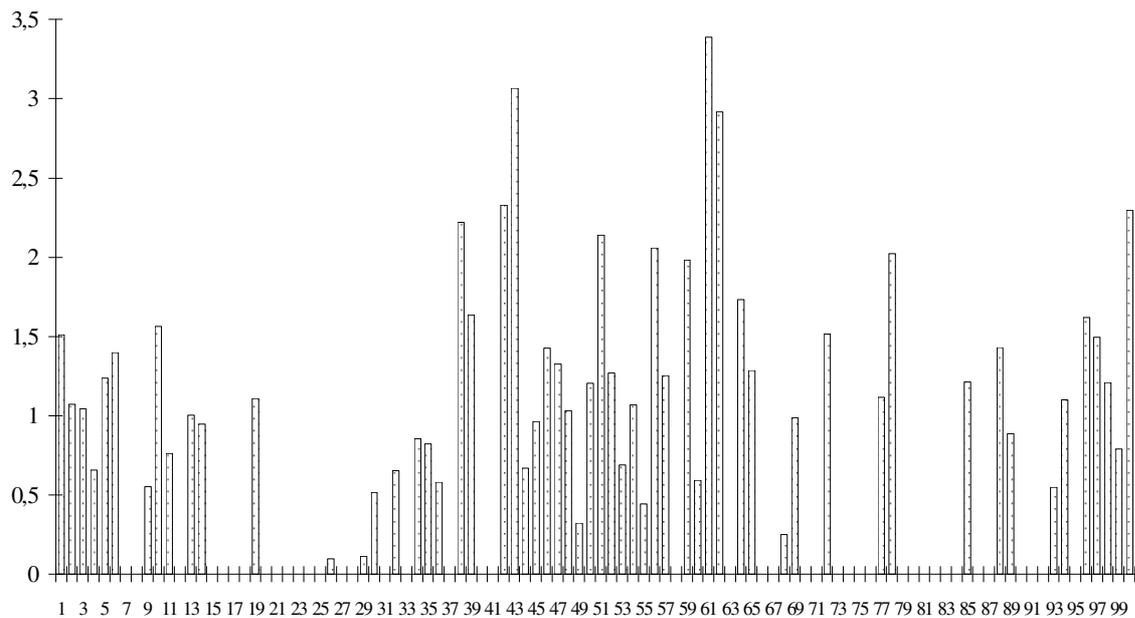


Figura 7.34 - Elemento 23, nodo 15 - Indice di danno di Park ed Ang

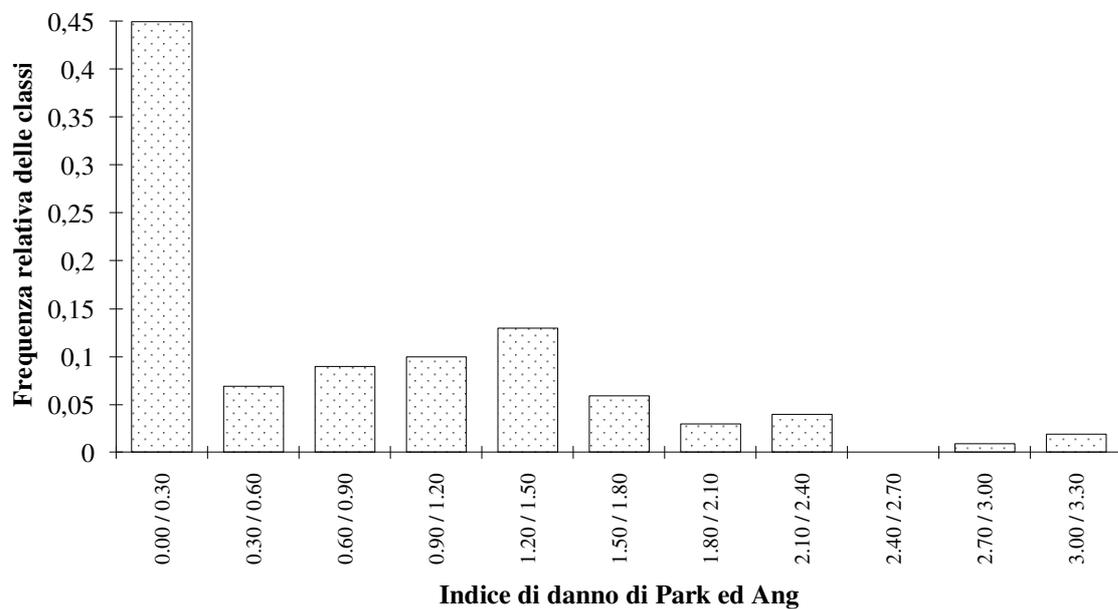


Figura 7.35-Elemento 23, nodo 15 - Istogramma delle frequenze relative

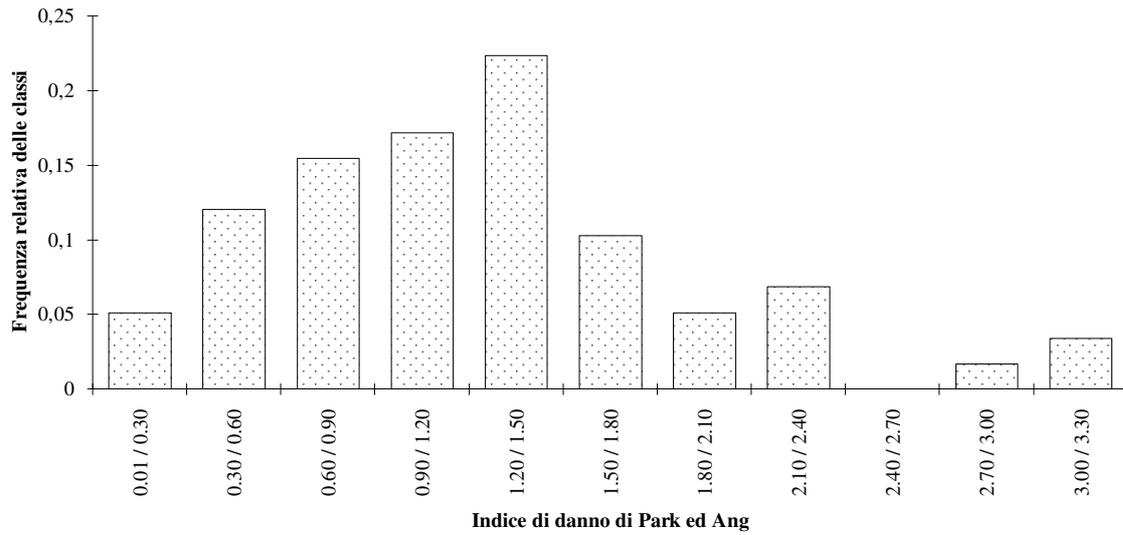


Figura 7.36-Elemento 23 nodo 15 - Istogramma delle frequenze relative (Non considerando i casi in cui la struttura permane in campo elastico)

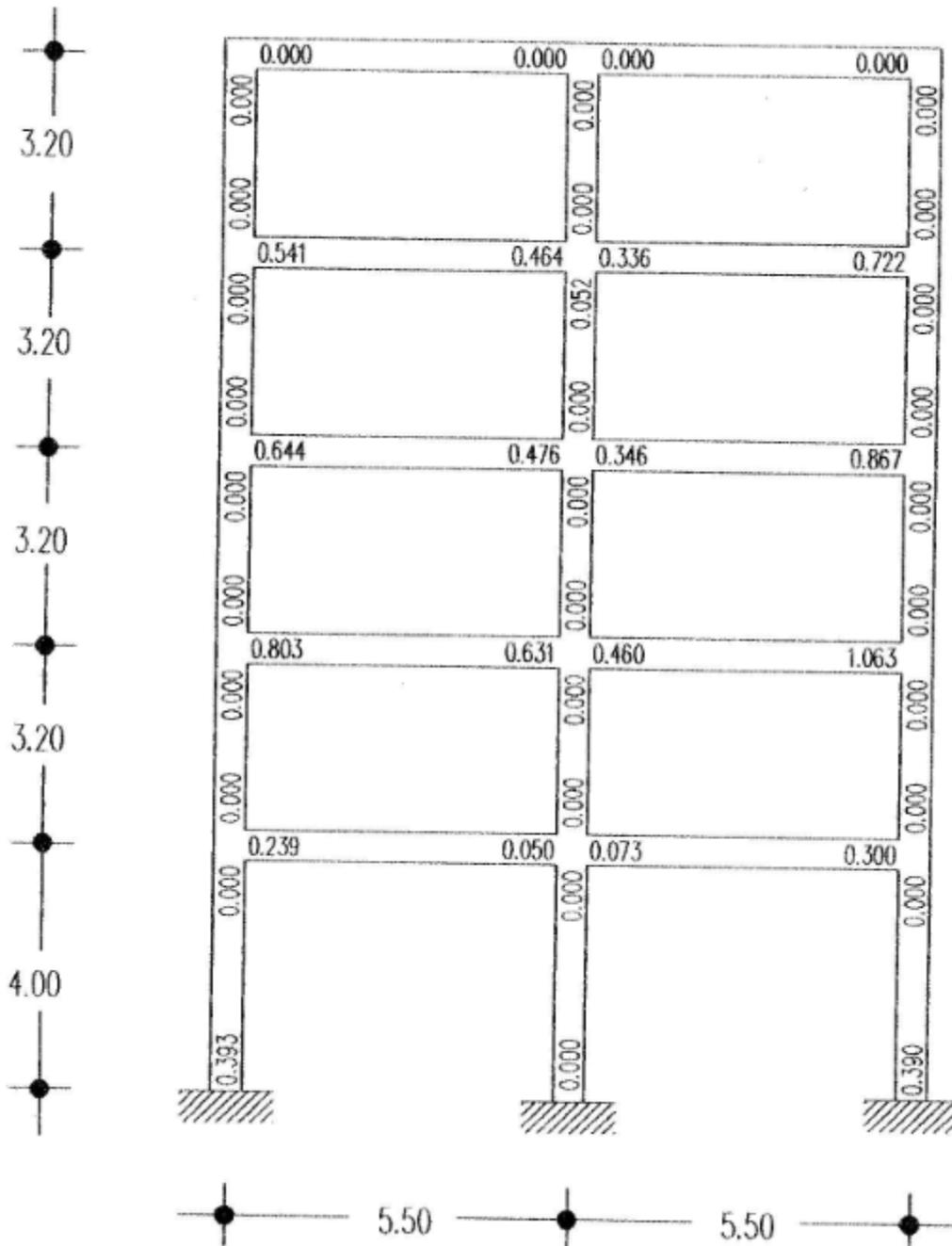


Figura 7.37 - Valor medio dell'indice di danno di Park ed Ang, all'istante  $t=30$  sec.

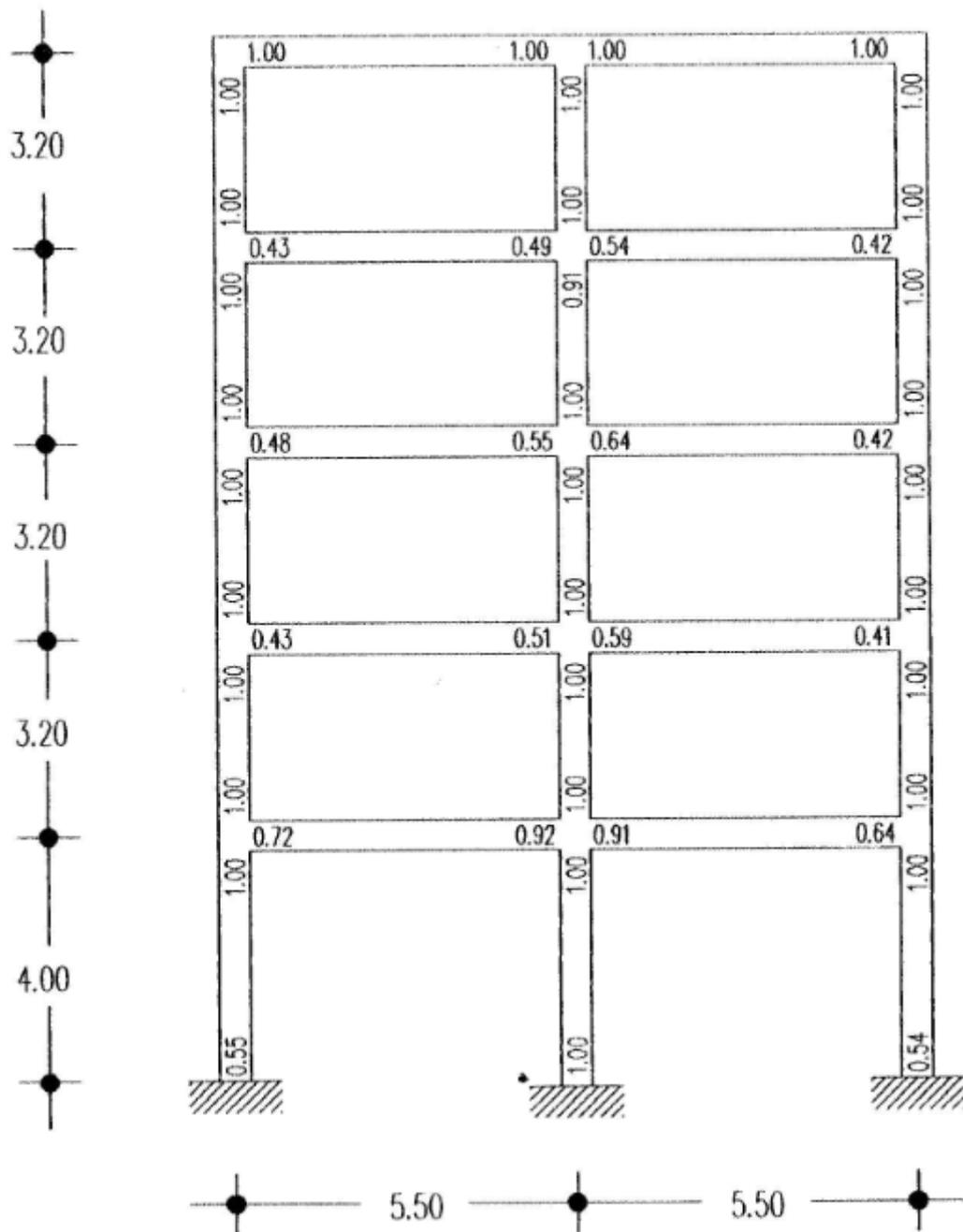


Figura 7.38- Rapporto tra casi favorevoli e possibili per l'evento A all'istante t=30 sec.

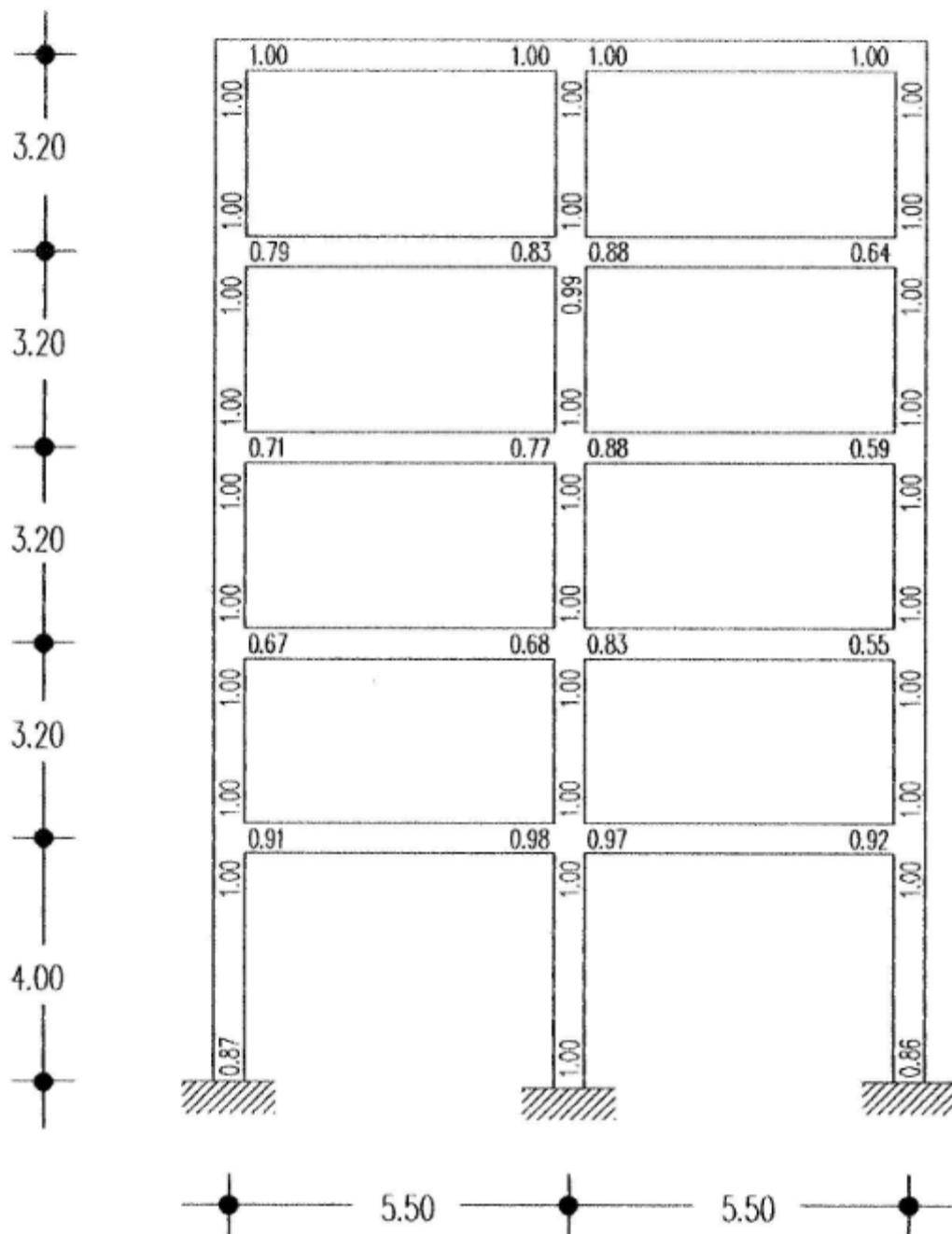


Figura 7.39- rapporto tra casi favorevoli e possibili per l'evento B all'istante  $t=30$  sec.

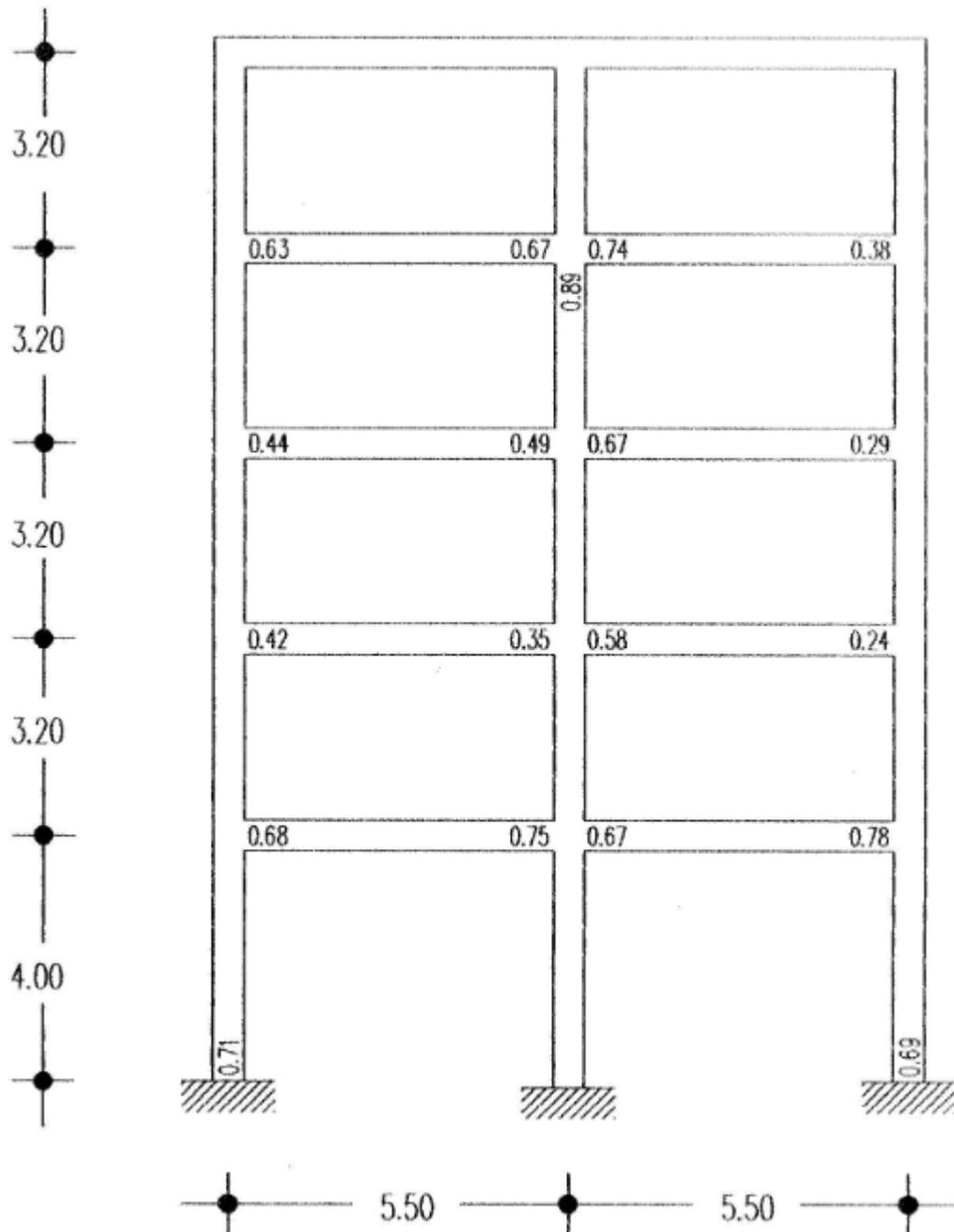


Figura 7.40 - probabilità che si verifichi l'evento B ammesso che l'evento C si sia verificato, all'istante  $t=30$  sec.









## **8. Conclusioni**

I metodi probabilistici nella teoria delle strutture mirano fondamentalmente a determinare la probabilità che una generica struttura, preliminarmente assegnata, possa utilmente assolvere la propria funzione istituzionale nell'arco della sua vita dichiarata, ovverosia - in una sola parola - la sua affidabilità.

Le strutture in zona sismica, in dipendenza delle marcate aleatorietà connesse con le definizioni delle azioni, delle resistenze, delle imperfezioni strutturali, ecc., rientrano strettamente nella classe privilegiata che formano oggetto di tali metodi.

Lo scopo di questa tesi è stato pertanto quello di mettere a punto un modello matematico ed una serie correlata di algoritmi numerici, allo scopo di poter effettuare l'analisi dinamica al passo dei telai in cemento armato, in regime non lineare, nonchè la

valutazione del danneggiamento che in essi si produce sotto l'azione sismica.

Lo studio è stato implementato nel codice di calcolo automatico DADRA che opera secondo il diagramma di flusso riportato nella Figura 8.1 seguente.

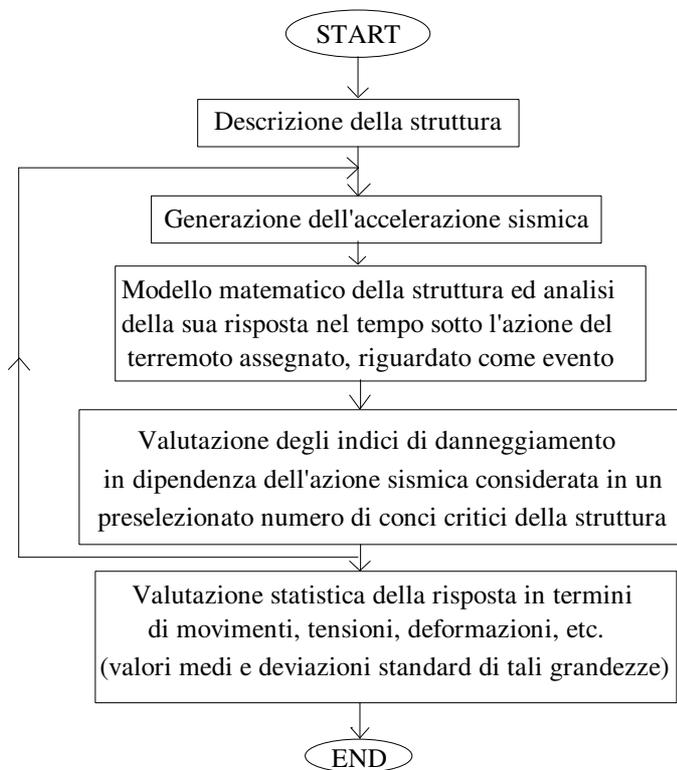


Figura 8.1 - Diagramma di flusso del codice DADRA

L'azione sismica, in termini di accelerazione al suolo, è trattata come un processo stocastico. E' stato pertanto messo a punto

un modello per la generazione artificiale di terremoti che è stato implementato in un apposito sottoprogramma in linguaggio "Fortran" che consente di generare accelerogrammi artificiali dotati di alcune proprietà preliminarmente assegnate. Tale programma è pure inserito nel codice di calcolo DADRA.

Il nuovo programma di calcolo così congegnato, permette non solo di effettuare le complesse analisi richieste, per mezzo di un PC ed in tempi relativamente brevi, ma anche di acquisire tutta una serie di informazioni che possono risultare utili e necessarie per una successiva valutazione della sicurezza strutturale del telaio in ambiente probabilistico.

Ne risulta infatti che, sottoponendo la struttura assegnata ad n terremoti artificiali, per ognuna delle variabili di stato di interesse, (movimenti, sforzi, deformazioni, indici di danno, ecc.),

è possibile ottenere le  $n$  funzioni di stato dipendenti da un solo parametro, il tempo. Queste ultime funzioni costituiscono lo spazio

$$S\{X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(k)}(t), \dots, X^{(n)}(t)\}$$

essendo  $X^{(k)}(t)$  il  $k$ -esimo esito, il quale è, come detto, una funzione del tempo. Fissato allora un generico istante  $t_0$  nella storia delle azioni artificialmente generate, si ha che i valori che si ottengono per queste funzioni, tra loro omogenee, rappresentano lo stato variabile di una nuova variabile stocastica. Poiché la risposta strutturale viene di volta in volta ottenuta in una successione discreta di  $s$  istanti di tempo, si ritiene utile determinare qui, ai fini di future valutazioni probabilistiche della sicurezza del telaio assegnato, i parametri rilevanti delle relative distribuzioni statistiche, (valore medio, deviazione standard, etc.), per ciascuna delle  $s$  variabili aleatorie in precedenza individuate.

La scrittura modulare del codice DADRA, consente infine di operare agevoli revisioni allo scopo di poter modificare od adattare il modello proposto a particolari analisi di natura probabilistica per le strutture in cemento armato in zona sismica.

## **Appendice A**

### **RICHIAMI DI STATISTICA E DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

#### **Premessa**

In questa appendice vengono riportati alcuni fondamentali richiami sui concetti della teoria matematica della probabilità, con particolare riferimento all'analisi ed alla rappresentazione dei dati, quali misure di eventi.

#### **A.1. Analisi e rappresentazione dei dati**

Assegnato un insieme ideale di elementi nominalmente omogenei, aventi una o più caratteristiche in comune, chiamato "popolazione", si può pervenire a formulare alcune predicazioni valide sullo stesso insieme, mediante l'analisi delle informazioni raccolte su un "campione", ossia su di una parte della popolazione stessa. Il procedimento mediante il quale si costruisce il campione, detto campionamento, dev'essere tale da assicurare a ciascun membro della popolazione la stessa probabilità di essere scelto.

Affinché le informazioni raccolte sul campione possano fornire a colpo d'occhio gli aspetti salienti del fenomeno in esame riguardante la popolazione è necessario però che esse siano raggruppate in modo opportuno. Ad es. se si vogliono raccogliere informazioni sulla resistenza a compressione di un cubetto in conglomerato, appartenente alla popolazione di tutte le prove che possono essere effettuate nel mondo, è pacifico che un campione di ampiezza  $N=100$ , non fornisce alcuna informazione particolarmente rappresentativa. Da questa banale constatazione si può intravedere l'importanza della buona scelta del campione quando si vuole dare una rappresentazione statistica ad una certa trasformazione fisica.

### **A.1.1. Modalità, Frequenza**

#### **i. Caso discreto**

Si supponga di lanciare un dado  $N=40$  volte e di registrare ad ogni lancio i risultati. Indicando con  $X$  il risultato del generico lancio, esso può assumere, nella singola prova, uno solo dei valori  $1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

In generale il valore che  $X$  può assumere nella generica prova si definisce "modalità" od evento, inoltre si definisce "frequenza assoluta" il numero totale di volte che la modalità si è presentata nelle  $N$  prove e "frequenza relativa" il rapporto tra la frequenza assoluta ed il numero  $N$  di prove effettuate.

Supponiamo che i risultati ottenuti nelle  $N$  prove siano quelli riportati nella Tabella A.1; in Figura A.1 è riportata la distribuzione della frequenza assoluta delle modalità di  $X$ , che variando la scala delle ordinate può rappresentare anche la distribuzione delle frequenze relative.

TABELLA A.1

Modalità	Frequenza (f)	Frequenza relativa (f/N)
1	5	$5/40=0,125$
2	10	$10/40=0,250$
3	7	$7/40=0,175$
4	7	$7/40=0,175$
5	6	$6/40=0,150$
6	5	$5/40=0,125$
	$\Sigma f=40$	$\Sigma (f/N)=1,000$

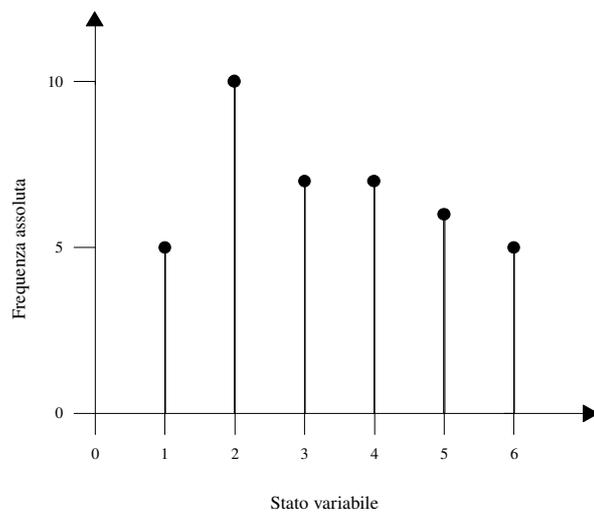


Figura A.1 - Distribuzione della frequenza assoluta delle modalità di X.

## **ii. Caso continuo**

Nel caso del dado, come abbiamo visto, i possibili risultati sono in numero finito, per tale motivo il fenomeno è detto "discreto".

Se invece consideriamo le prove di rottura a compressione dei cubetti in conglomerato, allora, indicata con  $X$  la resistenza a compressione nel generico evento, osserviamo che questa può assumere un qualsiasi valore in un certo intervallo, misurato sull'asse reale.

In generale, un fenomeno è detto "continuo" se la caratteristica misurabile dell'evento, detta "variabile" può assumere qualsiasi valore in un intervallo continuo di numeri posto sull'asse reale.

Se nella generica prova la resistenza a compressione assume ad es. il valore 35,027 MPa, non ha senso parlare di frequenza di tale preciso valore, poiché è praticamente impossibile determinare su un'altro cubetto lo stesso valore della resistenza  $X=35,027$  MPa. Per tale motivo, conviene raggruppare i dati entro una o più classi di frequenza, ossia entro intervalli opportunamente scelti, e si

definisce in questo caso una "frequenza assoluta della classe" come il numero di volte che, tra le N prove effettuate, la variabile ha assunto un valore che ricade nella classe. Dividendo la frequenza di classe per il numero totale di prove effettuate si ottiene la frequenza relativa.

Ad es. si supponga di aver effettuato N=150 prove di schiacciamento su cubetti in conglomerato, e di aver ottenuto i risultati riportati in tabella A.2. Esaminando tale tabella si possono subito trarre alcune informazioni circa i valori min e max registrati, circa la classe che si è presentata il maggior numero di volte, ecc. Per avere un quadro immediato del risultato campionario conviene riportare i dati ottenuti nelle prove sotto forma di "istogramma", ossia mediante una rappresentazione grafica costituita da una serie di rettangoli aventi come basi l'intervallo delle classi prescelte e come altezza la frequenza corrispondente. In particolare nella figura

A.2. è riportato l'istogramma di frequenza assoluta relativamente ai dati della tabella A.2.

TABELLA A.2

Classe	Limiti della classe (MPa)	Frequenza (f)	Frequenza relativa (f/N)
1	30-31	3	0.020
2	31-32	8	0.053
3	32-33	15	0.100
4	33-34	25	0.167
5	34-35	28	0.187
6	35-36	22	0.147
7	36-37	29	0.193
8	37-38	9	0.060
9	38-39	5	0.033
10	39-40	6	0.040
		$\Sigma f_i = 150$	$\Sigma (f_i/N) = 1,000$

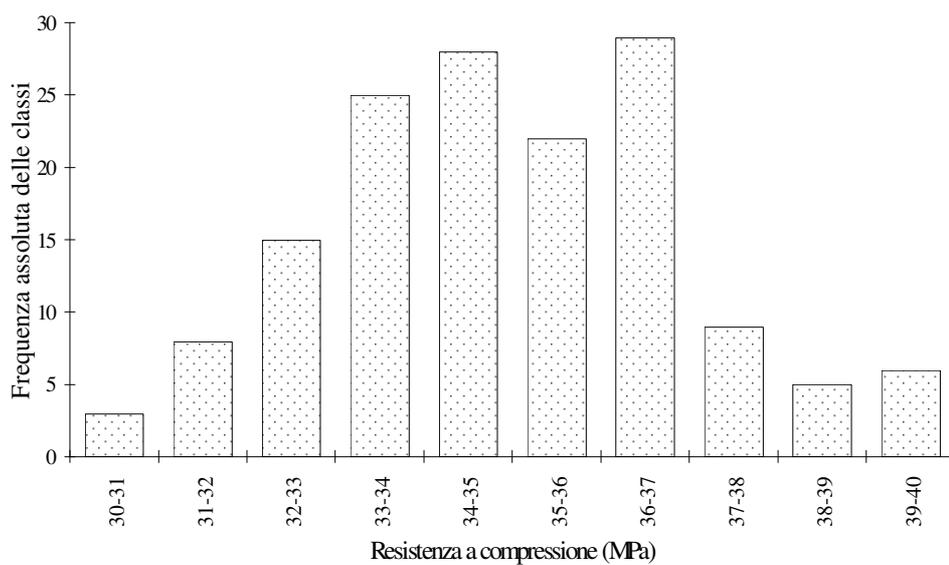


Figura A.2 - Istogramma delle frequenze assolute.

#### **A.1.1.1. Poligono delle frequenze**

Se si congiungono i punti medi dei lati superiori dei rettangoli dell'istogramma si ottiene una diversa rappresentazione della distribuzione di frequenza, che è detta "poligono delle frequenze".

#### **A.1.1.2. Distribuzione cumulata di frequenza**

Ad ogni distribuzione di frequenza si può associare una distribuzione cumulata di frequenza, riportando in corrispondenza delle varie modalità (caso discreto), oppure in corrispondenza dei vari intervalli di classe (caso continuo), la somma delle frequenze relative agli intervalli che precedono quello in esame (compreso l'ultimo).

Ad es. nelle figure A.3 ed A.4 sono riportati sia l'istogramma delle frequenze cumulate che il poligono delle frequenze cumulate relativamente ai dati della tabella A.2.

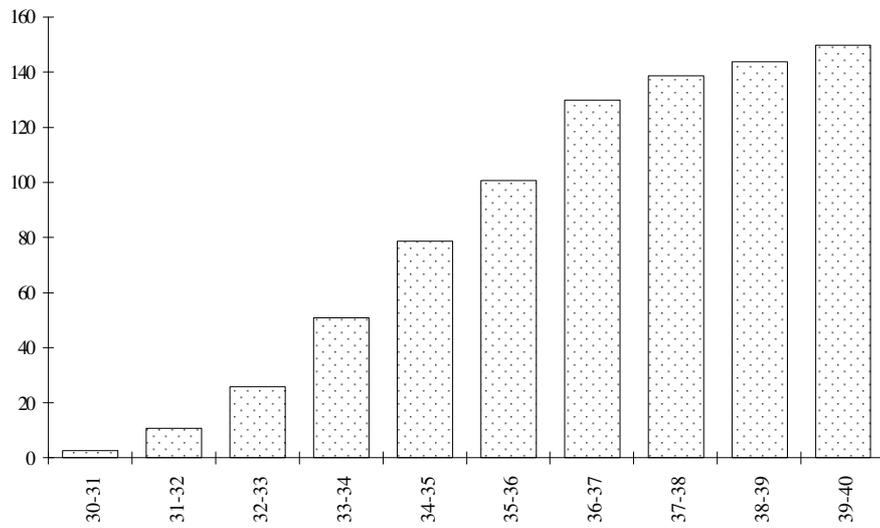


Figura A.3 - Istogramma delle frequenze cumulate

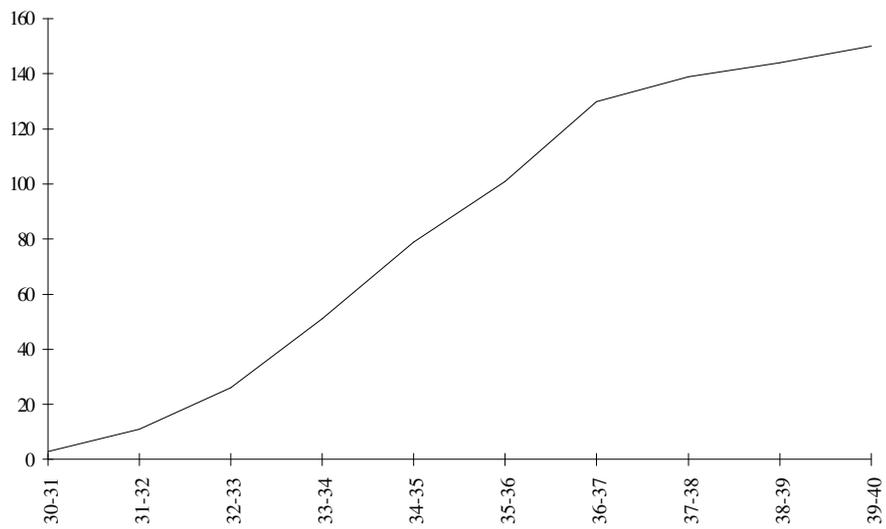


Figura A.4 - Poligono delle frequenze cumulate

## A.1.2. Parametri caratteristici di una distribuzione di

### frequenza

Una distribuzione di frequenza riferita ad un certo campione di ampiezza numerabile può essere caratterizzata da indici che tendono a localizzarne il "centro", detti "indici di posizione", e da indici che indicano la variabilità dei dati, detti "indici di dispersione".

#### A.1.2.1 Indici di posizione

**Moda.** E' il valore della variabile che corrisponde alla massima frequenza. Nel caso di variabile continua, è il valor medio della classe che corrisponde alla massima frequenza.

**Mediana.** E' il valore di mezzo di una serie di dati se N è dispari, ovvero la semisomma dei due valori di mezzo per N pari.

**Media.** E' la media aritmetica delle N osservazioni sperimentali della caratteristica (o della variabile) X

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} \quad (\text{A.1})$$

### A.1.2.2. Indici di dispersione

**Campo di variazione.** E' la distanza tra il valore più grande e quello più piccolo. Nell'es. riportato in tabella A.2 il campo di variazione è di 10 MPa.

**Varianza.** E' la media aritmetica del quadrato degli scarti dei valori osservati dalla media

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N} \quad (\text{A.2})$$

**Deviazione standard.** E' la radice quadrata della varianza

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N}} \quad (\text{A.3})$$

### A.1.3. Covarianza e coefficiente di correlazione lineare

Se nello studio di un campione vengono rilevate due variabili X e Y, le stesse si dicono "correlate" se tra loro esiste una qualche relazione matematica. In tal caso, tracciando un grafico in cui in ascissa sono riportati i valori rilevati per X ed in ordinata i valori rilevati per Y, i punti ottenuti si adagiano su una linea retta,

(correlazione lineare), od anche su una curva, (correlazione non lineare).

Una misura del grado di correlazione tra le due variabili è fornita dalla "covarianza" e cioè

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \quad (\text{A.4})$$

Si definiscono inoltre "scarto quadratico medio" di X e di Y le quantità

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2} \quad S_Y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (\text{A.5})$$

Si definisce infine "coefficiente di correlazione lineare" il rapporto

$$r = r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} \quad (\text{A.6})$$

## **A.2. Eventi, insiemi e probabilità**

### **A.2.1. Esperimento**

La singola osservazione su un certo fenomeno fisico viene definita "esperimento". L'esperimento si dice "casuale" se ripetuto nelle medesime condizioni, può dar luogo a risultati diversi.

### **A.2.2. Spazio campione**

Se il fenomeno fisico è considerato, com'è d'uopo, aleatorio, l'esito dell'esperimento non sarà noto a priori; tuttavia, una volta fissato un fenomeno fisico di natura aleatoria, è sempre possibile definire un certo insieme, i cui elementi costituiscono tutti i possibili esiti dell'esperimento connesso al fenomeno. Tale insieme è chiamato "spazio campione" ed è indicato generalmente con  $\Omega$ . Ciascun elemento di tale insieme è definito "evento elementare". Ad es. nel lancio di una moneta, lo spazio campione è rappresentato dall'insieme [testa-croce], mentre l'evento elementare è rappresentato dall'elemento "testa" o dall'elemento "croce".

### A.2.3. Evento

Un evento  $E$  è un sottoinsieme dello spazio campione  $\Omega$  :  $E \subset \Omega$ . La collezione  $\mathcal{F}$  di tutti i sottoinsiemi dello spazio campione prende il nome di "Spazio degli eventi". Il singolo elemento  $\omega \in \Omega$ , essendo sottoinsieme di  $\Omega$ , è un evento denominato "evento elementare". Anche l'insieme vuoto  $\Phi$  e l'insieme  $\Omega$ , essendo sottoinsiemi di  $\Omega$ , sono eventi:  $\Phi$  prende il nome di "evento impossibile",  $\Omega$  quello di "evento certo".

### A.2.4. Evento composto

Si definisce "evento composto" un evento costituito dall'unione di eventi elementari; ad esempio nel lancio di un dado, quando si considera come evento elementare l'uscita di uno dei sei numeri sulla faccia superiore del dado, l'uscita di un numero pari rappresenta un evento composto, in quanto costituito dall'insieme degli eventi elementari rappresentati dall'uscita dei numeri 2, 4 e 6. Ad un evento

composto corrisponde dunque un proprio sottoinsieme dello spazio campione.

#### **A.2.5. Eventi mutuamente esclusivi o incompatibili**

Due eventi A e B si dicono mutuamente esclusivi o incompatibili quando l'esito favorevole di uno di essi esclude l'esito favorevole dell'altro; in questo caso i due insiemi sono disgiunti, ossia  $A \cap B = \Phi$ . Ad esempio, nel lancio del dado, l'uscita di un numero pari esclude quella di un numero dispari, per cui i due eventi composti corrispondenti sono mutuamente esclusivi.

#### **A.2.6. Probabilità di un evento**

La definizione "frequentista" della probabilità di un evento è basata sul rapporto tra il numero  $n_A$  di esiti favorevoli all'evento A e il numero complessivo di esperimenti n, per n molto grande.

Secondo la definizione data da R. von Mises, [43], essa è fornita dal limite della frequenza relativa per  $n \rightarrow \infty$  e cioè

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (\text{A.7})$$

Questa definizione di probabilità detta anche empirica od a posteriori, è quella maggiormente usata esplicitamente o implicitamente dall'ingegnere.

Una definizione rigorosamente matematica della probabilità è quella fornita da A. N. Kolmogorov, (1931). La probabilità è una funzione  $P$  definita sulla famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$ , a valori nell'intervallo  $[0,1] \subset \mathbb{R}$

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$$

tale da soddisfare i seguenti assiomi

i) Condizione di non-negatività

La probabilità  $P(A)$  di un qualunque evento  $A$  è un numero reale maggiore o uguale a zero

$$P(A) \geq 0$$

ii) Condizione di normalizzazione

La probabilità dell'evento certo è pari a uno e la probabilità dell'evento impossibile è pari a zero

$$P(\Omega) = 1 \qquad P(\Phi) = 0$$

iii) Proprietà additiva

Dati due eventi  $A_1$  ed  $A_2$  disgiunti ( $A_1 \cap A_2 = \Phi$ ) la probabilità dell'evento unione  $A = A_1 \cup A_2$  è pari alla somma delle probabilità di ciascun evento

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Sulla base dei suddetti assiomi, sfruttando le proprietà degli insiemi, si possono dimostrare i seguenti teoremi:

a) La probabilità dell'evento  $\bar{A}$ , complementare di  $A$ , risulta essere pari a:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (\text{A.8})$$

Essendo  $\bar{A} \cap A = \Phi$  ed  $\bar{A} \cup A = \Omega$  si ha infatti

$$P(\Omega) = P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

da cui segue la (A.8).

b) Dati due eventi qualsiasi  $A$  e  $B$ , risulta in generale

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{A.9})$$

infatti, essendo

$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B) \quad (\text{A.10})$$

ed essendo inoltre  $A$  ed  $\bar{A} \cap B$  eventi disgiunti, (ovvero  $A \cap (\bar{A} \cap B) = \Phi$ )

per l'assioma iii) si ha

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \quad (\text{A.11})$$

Inoltre, essendo

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \quad (\text{A.12})$$

ed essendo pure  $(A \cap B)$  ed  $(\bar{A} \cap B)$  eventi disgiunti, sempre per l'assioma

iii) si ha

$$P(B) = P[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \quad (\text{A.13})$$

da cui si ottiene la relazione

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{A.14})$$

che, sostituita nella (A.11), fornisce la (A.9).

#### **A.2.7. Probabilità condizionata ed eventi indipendenti**

Si definisce "probabilità condizionata" di due eventi A e B e si indica con  $P(A|B)$ , la probabilità che si verifichi l'evento A posto che B si sia già verificato. Pertanto, tale probabilità è definita dalla relazione

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \quad (\text{A.15})$$

Nell'impostazione assiomatica la (A.15) costituisce il quarto assioma della teoria della probabilità.

Due eventi A e B si dicono "indipendenti" se si verifica la condizione

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{A.16})$$

che implica necessariamente

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B|A) = P(B) \quad (\text{A.17})$$

Si osservi che si parla di indipendenza tra due eventi A e B quando la loro intersezione non è vuota; nel caso in cui invece  $A \cap B = \Phi$  come abbiamo detto i due eventi si dicono incompatibili o disgiunti.

### **A.3. Variabili aleatorie**

Si definisce "variabile aleatoria" (V.A.)  $X(\omega)$  o più semplicemente X una funzione che faccia corrispondere ad ogni elemento  $\omega \in \Omega$ , (dove  $\Omega$  è lo spazio campione di un qualsivoglia fenomeno fisico aleatorio) un numero reale  $X(\omega)$  e cioè

$$\begin{array}{lcl} X : & \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ & \omega & \rightarrow X(\omega) = x \end{array}$$

La V.A. gode della proprietà che per ogni numero reale  $r$  esiste una probabilità  $P(\omega)$  tale che  $X(\omega) \leq r$ , e cioè

$$P(\omega : X(\omega) \leq r)$$

ossia, l'insieme degli elementi  $\omega$  tali che  $X(\omega) \leq r$  è un evento.

Esistono due tipi di variabili aleatorie: le variabili aleatorie discrete e quelle continue. Le prime possono assumere soltanto un numero finito di valori, (si pensi, ad esempio, alla variabile aleatoria legata al lancio del dado); le seconde possono, invece, assumere un qualunque valore all'interno di un dato intervallo, (si pensi, ad esempio, ai risultati di una prova di resistenza a trazione per un tondino d'acciaio).

### **A.3.1. Funzione densità di probabilità**

Una variabile aleatoria  $X(\omega)$  risulta completamente definita, da un punto di vista della teoria matematica delle probabilità, attraverso la conoscenza della cosiddetta "funzione densità di probabilità",  $f(x)$ . Tale funzione è caratterizzata dal fatto che

l'area da essa racchiusa con l'asse delle ascisse in un intervallo  $[x_1, x_2]$  fornisce la probabilità che la variabile aleatoria  $X(\omega)$  ricada in tale intervallo e cioè:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P(x_1 \leq X(\omega) \leq x_2) \quad (\text{A.18})$$

Da tale definizione della funzione densità di probabilità, sortiscono le seguenti proprietà od effetti degli assiomi in precedenza assunti

- 1)  $f(x)dx = P(x \leq X(\omega) \leq x + dx)$
- 2)  $P(X(\omega) = x_1) = \int_{x_1}^{x_1} f(x)dx = 0 \Rightarrow P(X = -\infty) = 0, P(X = +\infty) = 0$
- 3)  $P(-\infty \leq X(\omega) \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Nella Figura A.5 è riportato ad es. il diagramma della funzione densità di probabilità di una certa variabile aleatoria continua,  $X(\omega)$

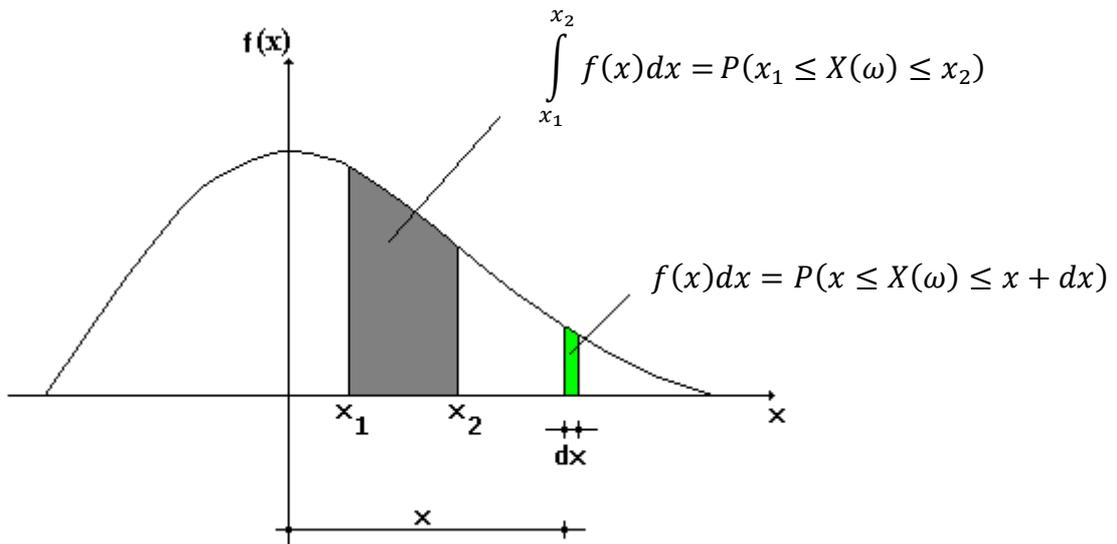


Figura A.5 - Funzione densità di probabilità di una V.A. continua

### A.3.2. Funzione di ripartizione

Si definisce "funzione di ripartizione di probabilità"  $F(x)$  della v.a. continua  $X$ , la funzione definita in  $\mathbb{R}$  tale che

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \quad 0 \leq F(x) \leq 1 \quad (\text{A.19})$$

Si noti che la scrittura  $(X \leq x)$ , rappresenta l'insieme dei punti  $\omega$  dello spazio campione  $\Omega$  tale che i valori  $X(\omega)$  siano sempre non superiori a  $x$ , e cioè

$$F(x) = P(\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \quad (\text{A.20})$$

La F.D.P. e la F.R.P. non sono tra loro indipendenti risultando legate dalla relazione

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (\text{A.21})$$

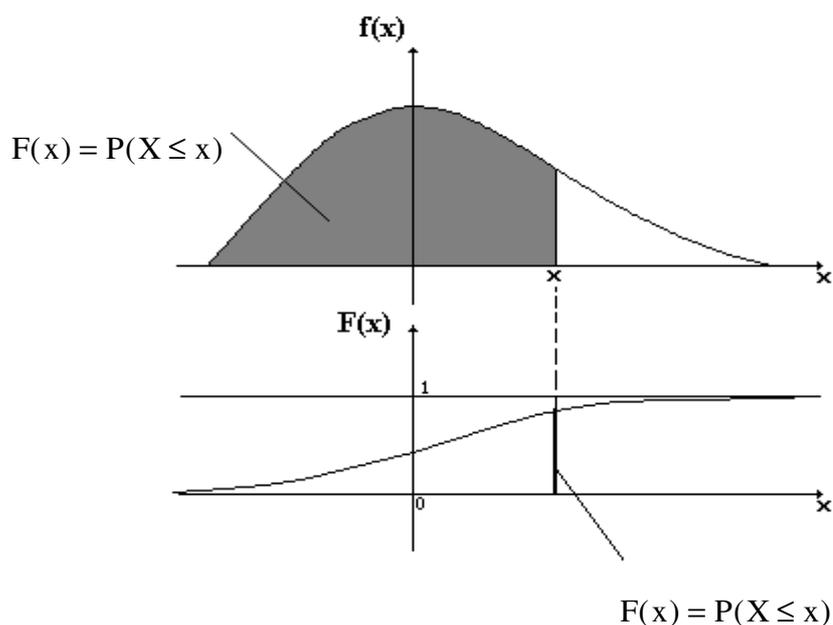


Figura A.6 - Funzione densità di probabilità e funzione ripartizione di probabilità di una V.A.

Geometricamente, il valore  $F(x)$  della funzione di ripartizione rappresenta l'area a sinistra della retta verticale passante per  $x$  compresa tra la curva di densità  $f(x)$  e l'asse  $x$  (figura A.6).

Usando la definizione (20) si possono inoltre mostrare le

seguenti proprietà:

- 1)  $F(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0$
- 2)  $F(+\infty) = P(X \leq +\infty) = 1$
- 3)  $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$

### A.3.3. Valor medio di una variabile aleatoria

Si definisce valor medio di una variabile aleatoria  $X$  dotata di densità  $f(x)$  e si indica con  $E[X]$  o  $\mu_x$ , l'integrale:

$$\mu(x) = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad (\text{A.22})$$

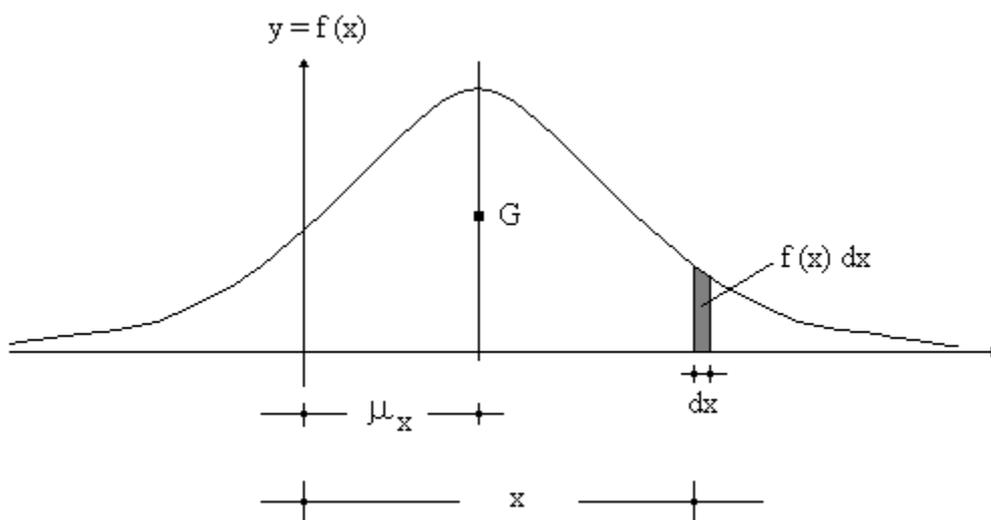


Figura A.7 - Valor medio di una V.A.

Il valor medio di una variabile aleatoria rappresenta pertanto il momento statico  $S_y$  dell'area sottesa dalla curva  $f(x)$  rispetto l'asse  $y$ . Infatti, con riferimento alla figura A.7, il momento statico

dell'areola elementare  $f(x)dx$  è pari a  $dS_Y = xf(x)dx$ , e quindi l'integrale della  $dS_Y$  rappresenta il momento statico totale  $S_Y$ . Ed essendo l'area sottesa dalla curva  $f(x)$  unitaria, si ha  $A \cdot \mu_x = \mu_x = S_Y$ , ossia la (22).

#### **A.3.4. Varianza**

Si definisce varianza di una variabile aleatoria continua  $X$ , dotata di densità  $f(x)$  l'integrale:

$$\delta_x^2 = \text{var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx \quad (\text{A.23})$$

La varianza di una variabile aleatoria rappresenta pertanto il momento d'inerzia baricentrico dell'area unitaria sottesa dalla curva  $f(x)$ .

#### **A.3.5. Deviazione standard**

La deviazione standard è la radice quadrata positiva della varianza di una variabile aleatoria e cioè

$$\delta_x = \sqrt{\text{var}[X]} \quad (\text{A.24})$$

### **A.3.6. Coefficiente di variazione**

Il rapporto tra la deviazione standard  $\delta_x$  e il valor medio  $\mu_x$  di una variabile aleatoria si chiama coefficiente di variazione (cdv), e cioè

$$C_x = \frac{\delta_x}{\mu_x} \quad (\text{A.25})$$

### **A.3.7. Variabile casuale standardizzata**

Se  $X$  è una variabile aleatoria con valor medio  $\mu_x$  e scarto quadratico medio  $\delta_x$ , si definisce "variabile casuale ridotta o standardizzata" associata ad  $X$ , la variabile

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\delta_x} \quad (\text{A.26})$$

La variabile ridotta associata ad  $X$  risulta essere adimensionale con valor medio nullo e varianza unitaria e cioè  $E[Z]=0$ ,  $\text{var}[Z]=1$ .

### A.3.8. Funzione di variabile aleatoria

La v.a.  $X$  è una funzione definita in  $\Omega$  a valori in  $\mathbb{R}$  la quale ad ogni elemento  $\omega \in \Omega$  fa corrispondere il numero reale  $X(\omega) = x$ :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) = x \end{aligned}$$

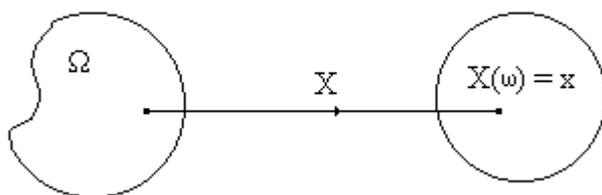


Figura A.8 - Rappresentazione grafica della V.A.

Inoltre  $X$  è v.a. solo se  $\forall r \in \mathbb{R}$  l'insieme degli elementi di  $\omega \in \Omega$  tale che  $X(\omega) \leq r$  è un evento.

Consideriamo adesso una variabile aleatoria  $Y$  legata alla v. a.

$X$  attraverso il seguente legame funzionale

$$Y = \varphi(X) \tag{A.27}$$

il quale, ad ogni elemento  $X(\omega) = x$ , fa corrispondere un ben definito numero reale

$$Y(\omega) = y = \varphi[X(\omega)] = \varphi(x) \tag{A.28}$$

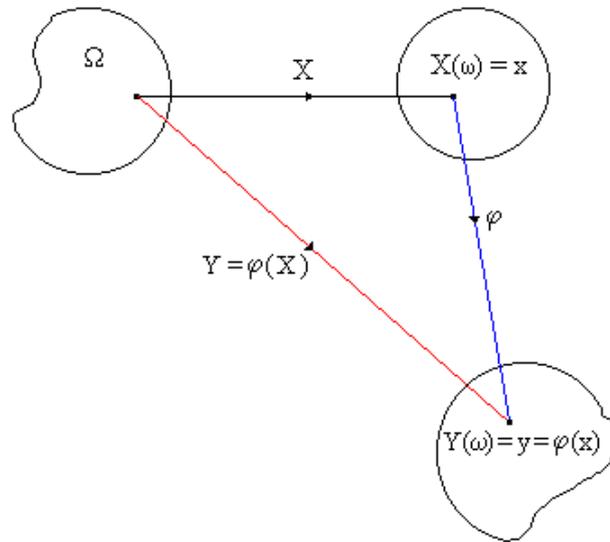


Figura A.9 - Rappresentazione grafica di una funzione di V.A.

Se la funzione reale  $\varphi(\cdot)$  è monotona, appare evidente che la probabilità che la variabile aleatoria  $X$  cada nell'intervallo  $[x, x+dx]$  coincide con la probabilità che la variabile  $Y$  cada nell'intervallo  $[y, y+dy]$ , avendo posto

$$y = \varphi(x) \tag{A.29}$$

Allora è possibile scrivere la seguente relazione

$$f(x) dx = h(y) dy \tag{A.30}$$

dalla quale si ottiene

$$h(y) = f(x) dx/dy \tag{A.31}$$

Il valor medio di  $Y$  è fornito dalla seguente espressione

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} yh(y)dy \quad (\text{A.32})$$

che, ricordando le (29) e (30), può essere riscritta come segue

$$E[Y] = E[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)dx \quad (\text{A.33})$$

Quindi, per valutare il valor medio di una funzione di una variabile aleatoria  $X$  è sufficiente eseguire l'integrale del prodotto di tale funzione per la funzione densità di probabilità di  $X$ .

#### **A.3.9. Momenti di una variabile aleatoria**

Si definisce momento di ordine  $r$  di una variabile aleatoria  $X$  e si indica con  $m_r[X]$  il valor medio della variabile aleatoria  $X^r$ . Data  $Y=X^r$ , con  $r$  intero, con riferimento alla (33) si ha dunque:

$$m_r(X) = E[X^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx \quad (\text{A.34})$$

in particolare risulta:

$$m_0(X) = E[X^0] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad (\text{A.35})$$

$$m_1(X) = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \mu_x \quad (\text{A.36})$$

$$m_2(X) = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \quad (\text{A.37})$$

### A.3.10. Funzione caratteristica

Oltre che dalla funzione densità di probabilità, una variabile aleatoria può essere rappresentata attraverso la conoscenza di un'altra importante funzione, detta "funzione caratteristica", che è pari alla media della variabile aleatoria  $Y=\exp(-i\theta X)$ , e cioè

$$M_x(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\theta x) f(x) dx = E[\exp(-i\theta x)] \quad (\text{A.38})$$

essendo  $\theta$  un parametro reale ed avendo indicato con  $i$  l'unità immaginaria. La funzione caratteristica rappresenta, quindi, la trasformata di Fourier della funzione densità di probabilità. Nota la funzione caratteristica, mediante la trasformata inversa di Fourier si può quindi ricavare la F.D.P. della v.a.  $X$  e cioè

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\theta x) M_x(\theta) d\theta \quad (\text{A.39})$$

Espandendo in serie di McLaurin la funzione caratteristica si ottiene

$$M_x(\theta) = M_x(\theta)|_{\theta=0} + \frac{dM_x(\theta)}{d\theta} |_{\theta=0} \theta + \frac{1}{2!} \frac{d^2 M_x(\theta)}{d\theta^2} |_{\theta=0} \theta^2 + \dots \quad (\text{A.40})$$

da cui, essendo

$$\frac{d^k M_x(\theta)}{d\theta^k} = (-i)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \exp(-i\theta x) f(x) dx \quad (\text{A.41})$$

ed in conseguenza

$$\frac{d^k M_x(\theta)}{d\theta^k} |_{\theta=0} = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx = (-i)^k m_k[X] \quad (\text{A.42})$$

si ottiene l'importante risultato

$$M_x(\theta) = 1 + (-i)^1 m_1[X] \theta + \frac{(-i)^2}{2!} m_2[X] \theta^2 + \frac{(-i)^3}{3!} m_3[X] \theta^3 + \dots \quad (\text{A.43})$$

ossia

$$M_x(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} m_j[X] \theta^j. \quad (\text{A.44})$$

Da tale espressione si evince che i momenti di una variabile aleatoria  $X$  rappresentano, a meno dei termini  $(-i)^j$ , i coefficienti dello sviluppo in serie di McLaurin della funzione caratteristica. Per cui, se sono noti i momenti (fino all'ordine infinito) di una

variabile aleatoria, è possibile risalire alla funzione caratteristica e da questa, attraverso la trasformata inversa di Fourier, alla funzione densità di probabilità. Ciò implica che una variabile aleatoria può essere caratterizzata pienamente, da un punto di vista probabilistico, dalla conoscenza di tutti i suoi momenti.

#### A.3.11. Log-funzione caratteristica

Un'altra funzione che permette di caratterizzare una variabile aleatoria è la cosiddetta log-funzione caratteristica data dal logaritmo naturale della funzione caratteristica e cioè  $\ln M_x(\theta)$ . Tale funzione, sviluppata in serie di McLaurin, fornisce

$$\ln M_x(\theta) = \ln M_x(\theta)|_{\theta=0} + \frac{d \ln M_x(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \theta + \frac{1}{2!} \frac{d^2 \ln M_x(\theta)}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} \theta^2 + \dots \quad (\text{A.45})$$

da cui, posto

$$k_j[X] = \frac{1}{(-i)^j} \frac{d^j \ln M_x(\theta)}{d\theta^j} \Big|_{\theta=0} \quad (\text{A.46})$$

detto "cumulante di ordine j" della variabile aleatoria X, si trae

la relazione

$$\ln M_x(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} k_j[X] \theta^j \quad (\text{A.47})$$

Applicando ora la funzione esponenziale ad ambo i membri, si ottiene

la relazione

$$M_x(\theta) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} k_j[X] \theta^j\right) \quad (\text{A.48})$$

la quale permette di esprimere la funzione caratteristica attraverso

i cumulanti fino all'ordine infinito della variabile aleatoria. Tale

espansione in serie della funzione caratteristica, rispetto alla

(40), ha il vantaggio di essere convergente.

### A.3.12. Relazione tra momenti e cumulanti

I cumulanti e i momenti di una variabile aleatoria sono tra loro legati da semplici relazioni che consentono di ottenere il cumulante di ordine  $j$ , noti tutti i momenti fino all'ordine  $j$ , e viceversa (Di Paola et al., 1991, [31]). Tali relazioni hanno la seguente forma ricorsiva

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1[X] = k_1[X] \\ m_2[X] = k_2[X] + k_1[X] \cdot m_1[X] \\ m_3[X] = k_3[X] + 2k_2[X] \cdot m_1[X] + k_1[X] \cdot m_2[X] \\ m_4[X] = k_4[X] + 3k_3[X] \cdot m_1[X] + 3k_2[X] \cdot m_2[X] + k_1[X] \cdot m_3[X] \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (A.49)$$

e sono facili da ricordare, se si osserva che i coefficienti a secondo membro sono quelli del triangolo di Tartaglia.

I cumulanti rivestono una notevole importanza nell'ambito della descrizione di una variabile aleatoria. Infatti i cumulanti fino al quarto ordine hanno un significato fisico molto preciso che permette

di caratterizzare, almeno qualitativamente, la funzione densità di probabilità della variabile considerata. Infatti:

- il cumulante del primo ordine coincide con il valor medio della variabile aleatoria

$$k_1[X] = m_1[X] = E[X] = \mu_x \quad (\text{A.50})$$

- il cumulante del secondo ordine coincide con la varianza della variabile aleatoria

$$k_2[X] = m_2[X] - m_1^2[X] = \text{var}[X] = \sigma_x^2 \quad (\text{A.51})$$

dove  $\sigma_x$  è la deviazione standard.

- il cumulante del terzo ordine fornisce un'indicazione sull'asimmetria della F.D.P. della variabile aleatoria. Infatti esso è legato al "coefficiente di asimmetria"  $\gamma_a$ , il quale è

definito dal rapporto

$$\gamma_a = \frac{k_3[X]}{\sqrt{k_2^3[X]}} \quad (\text{A.52})$$

E' immediato notare che tale coefficiente è nullo solo quando la funzione densità di probabilità è simmetrica rispetto al valor

medio della variabile; esso, quindi, misura il livello di  
asimmetria della funzione densità di probabilità;

- il cumulante del quarto ordine ha il significato connesso con il  
cosiddetto "coefficiente d'eccesso"  $\gamma_e$ , definito dal rapporto:

$$\gamma_e = \frac{k_4[X]}{k_2^2[X]} \quad (A.53)$$

tale coefficiente fornisce infatti una stima sulla acutezza del  
picco della funzione densità di probabilità in prossimità del suo  
valore massimo.

I cumulanti di ordine maggiore non hanno significati altrettanto  
evidenti in confronto ai primi quattro.

Dalle espressioni di  $M_x(\theta)$  in funzione di  $f(x)$  o di  $m_j[X]$  o di  
 $k_j[X]$  risulta evidente come la completa descrizione della variabile  
aleatoria  $X$  possa essere ottenuta indifferentemente dalla F.D.P. o  
dalla sua funzione caratteristica od anche dai suoi momenti ovvero  
dai suoi cumulanti di ogni ordine.

In particolare si osservi ad es. che se

$$\begin{cases} k_1[X] \neq 0 \\ k_s[X] = 0 \forall s \geq 2 \end{cases} \Rightarrow X \text{ è deterministica;}$$

$$\begin{cases} k_1[X] \neq 0; k_2[X] \neq 0 \\ k_s[X] = 0 \forall s \geq 3 \end{cases} \Rightarrow X \text{ è simmetrica e non ha eccesso per cui,}$$

si dice che è normalmente distribuita.

### A.3.13. Variabile aleatoria gaussiana

Una variabile aleatoria si dice "gaussiana", o, "normale" se tutti i suoi cumulanti di ordine maggiore del secondo sono nulli. La funzione caratteristica di una variabile aleatoria gaussiana assume, quindi, la seguente espressione ricavabile dalla (44) ponendovi  $k_j[X]=0 \forall j \geq 3$ :

$$M_x[\theta] = \exp\left(-ik_1[X]\theta - \frac{1}{2}k_2[X]\theta^2\right) \quad (\text{A.54})$$

ossia

$$M_x[\theta] = \exp\left(-i\mu_x\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right) \quad (\text{A.54a})$$

Dalla precedente, effettuando l'antitrasformata di Fourier, si ottiene la funzione densità di probabilità della variabile aleatoria gaussiana nella forma ben nota

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_2[X]}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x-k_1[X])^2}{k_2[X]} \right] \quad (\text{A.55})$$

od anche

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \quad (\text{A.55a})$$

Le (54) e (55) mostrano che la completa descrizione di una variabile aleatoria gaussiana è ottenibile attraverso la sola conoscenza dei cumulanti del primo e del secondo ordine, o, viste le relazioni intercorrenti fra i cumulanti e i momenti, anche attraverso la conoscenza del valor medio e della varianza della variabile stessa. E' importante sottolineare che, mentre i cumulanti di ordine maggiore del secondo di una variabile aleatoria gaussiana sono nulli, la stessa cosa non può dirsi per i momenti di ordine maggiore del secondo.

La relativa funzione di ripartizione, applicando la (19), è data da

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] dt \quad (\text{A.56})$$

### A.3.14. Variabile aleatoria gaussiana standardizzata

Se si introduce la v.a. ridotta (normalizzata o standardizzata)

corrispondente a  $X$  e cioè

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \quad (\text{A.57})$$

poiché risulta

$$E[Z] = \frac{E[X] - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{\mu_x - \mu_x}{\sigma_x} = 0 \quad \text{valor medio nullo}$$

$$\text{var}[Z] = \text{var}\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}\right) = \frac{\sigma_x}{\sigma_x} = 1 \quad \text{deviazione standard unitaria}$$

si può esprimere la funzione densità di probabilità della nuova variabile aleatoria nella forma seguente

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \quad (\text{A.58})$$

mentre per la funzione di ripartizione si ha la forma

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (\text{A.59})$$

La rappresentazione grafica della (58) prende il nome di "curva a campana", ed in opportune tabelle, [30], sono riportati i valori

dell'area al di sotto di tale curva limitata fra le ordinate  $z=0$  e qualunque valore positivo  $z$ .

In particolare si hanno ad es. i seguenti risultati

- $P(-1 \leq Z \leq 1) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \leq 1\right) = P(\mu_x - \sigma_x \leq X \leq \mu_x + \sigma_x) = 0.6827$
- $P(-2 \leq Z \leq 2) = P\left(-2 \leq \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \leq 2\right) = P(\mu_x - 2\sigma_x \leq X \leq \mu_x + 2\sigma_x) = 0.9545$
- $P(-3 \leq Z \leq 3) = P\left(-3 \leq \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \leq 3\right) = P(\mu_x - 3\sigma_x \leq X \leq \mu_x + 3\sigma_x) = 0.9973$

Utilizzando inoltre la (A.57) e cioè

$$X = \mu_x + \sigma_x Z$$

si ottengono le seguenti relazioni

$$P(X \leq x_0) = P(X - \mu_x \leq x_0 - \mu_x) = P\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{x_0-\mu_x}{\sigma_x}\right) = P\left(Z \leq \frac{x_0-\mu_x}{\sigma_x}\right) \Rightarrow$$

•

$$\Phi\left(\frac{x_0-\mu_x}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_0-\mu_x}{\sigma_x}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

- $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu_x}{\sigma_x}\right)$

### A.3.15. Funzione degli errori

Si definisce "funzione degli errori" e si indica con  $\text{erf}(z)$  la funzione:

$$\text{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (\text{A.60})$$

Tale funzione è legata alla funzione F.R.P.S.  $\Phi(z)$ ; per  $z \geq 0$  si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 0.5 + \text{erf}(z) \quad (\text{A.61})$$

#### A.4. Variabili aleatorie multidimensionali

Per definire e per descrivere matematicamente gli eventi che dipendono da  $n$  parametri casuali, occorre introdurre la nozione di variabile aleatoria n-dimensionale, denominata anche vettore aleatorio ad  $n$  componenti. Ad es. nel caso in cui le variabili aleatorie sono due si parla di variabile aleatoria doppia o bidimensionale, e tutti i concetti espressi nei paragrafi precedenti con riferimento ad una singola variabile aleatoria possono essere facilmente estesi al caso multidimensionale.

Si considerino  $n$  variabili aleatorie  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ; indichiamo con  $\bar{X}$  il vettore di tali v.a. e con  $\bar{x}$  il vettore le cui componenti  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  rappresentano i domini delle v.a.  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ :

$$\bar{X}^T = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_n] \quad (\text{A.62})$$

$$\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n] \quad (\text{A.63})$$

#### A.4.1. Funzione di ripartizione congiunta

Si definisce Funzione di ripartizione congiunta  $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  delle  $n$  variabili aleatorie  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  la funzione definita in  $R$  con valori dati dalla probabilità degli eventi  $(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3, \dots, X_n \leq x_n)$  e cioè

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3, \dots, X_n \leq x_n) \quad (A.64)$$

Tale funzione rappresenta quindi la probabilità del verificarsi congiunto degli  $n$  eventi:  $(X_1 \leq x_1), (X_2 \leq x_2), (X_3 \leq x_3) \dots (X_n \leq x_n)$ .

#### A.4.2. Funzione densità di probabilità congiunta

Si definisce Funzione densità di probabilità congiunta la funzione  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  non negativa e normalizzata

$$\begin{aligned} 1) f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &\geq 0 \\ 2) \int_{-\infty \dots n \text{ volte}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n &= 1 \end{aligned} \quad (A.65)$$

tale che per la  $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  risulti

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \int_{-\infty \dots n \text{ volte}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta, \eta, \dots, \xi) d\zeta d\eta \dots d\xi \quad (A.66)$$

Tale funzione rappresenta, nell'iperspazio a  $n+1$  dimensioni, una superficie che definisce la probabilità che, congiuntamente, le  $n$  variabili aleatorie assumano valori definiti all'interno di determinati intervalli dei corrispondenti domini. Ad esempio, per una variabile bidimensionale, la funzione densità di probabilità congiunta, relativa alle due variabili  $X_1$  e  $X_2$ , è una superficie bidimensionale  $f(x_1, x_2)$  definita in  $x_1, x_2$ , che è detta superficie di probabilità. Il volume racchiuso da questa superficie è uguale a 1, in accordo con l'assioma della normalizzazione. La probabilità che la v.a.  $X_1$  sia compresa tra  $a_1$  e  $b_1$  e che  $X_2$  sia compresa tra  $a_2$  e  $b_2$  è rappresentata dal volume sotteso da tale funzione in corrispondenza del dominio  $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$ , vedi figura A.10, ed è fornita da:

$$P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{A.67})$$

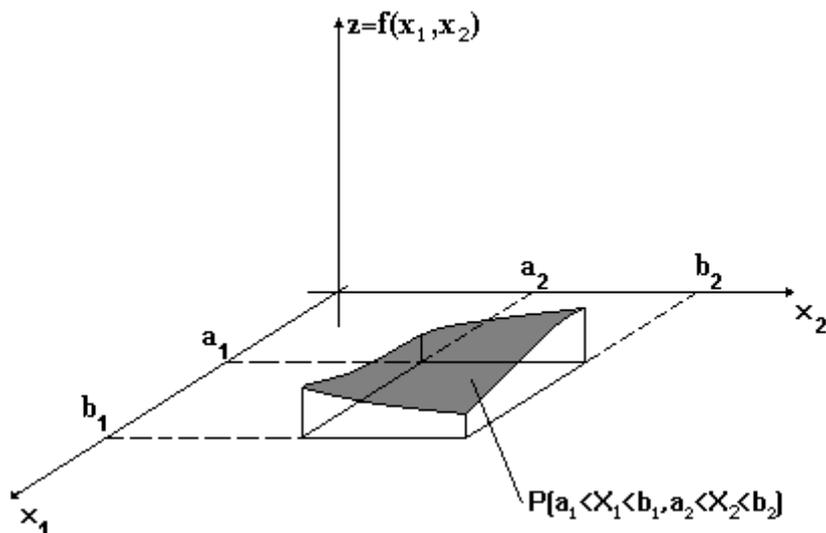


Figura A.10 - Funzione densità di probabilità congiunta di una v.a. bidimensionale.

### A.4.3. Densità marginale

Data una variabile aleatoria a  $n$  dimensioni, si consideri la funzione di probabilità congiunta relativa alle prime  $m$  componenti del vettore  $\bar{X}$  (con  $m < n$ ) senza considerare le successive  $n-m$  variabili. Tale funzione viene definita "funzione densità di probabilità marginale" della variabile  $\bar{X}$ , e può essere ottenuta a partire dalla funzione densità di probabilità congiunta di  $\bar{X}$ , saturando le variabili  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$  tramite integrazione, e cioè

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n \quad (\text{A.68})$$

Ad esempio, nel caso di variabile bidimensionale, la funzione densità di probabilità marginale relativa ad una delle due variabili può essere ottenuta a partire da quella congiunta, attraverso la seguente integrazione

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \quad (\text{A.69})$$

Dalle relazioni precedenti appare evidente che il numero di informazioni contenute nella funzione densità di probabilità congiunta è superiore al numero di quelle contenute nelle funzioni densità di probabilità marginale e che, mentre è possibile ottenere una qualunque funzione densità di probabilità marginale a partire da quella congiunta, non è possibile il viceversa.

#### **A.4.4. Densità di probabilità condizionata**

Sia  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  la funzione densità di probabilità congiunta delle v.a.  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , si definisce "funzione densità

di probabilità condizionata" delle prime  $m$  variabili (con  $m < n$ )

rispetto alle altre  $n-m$  variabili la funzione

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)}{f(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)} \quad (\text{A.70})$$

Da tale relazione è possibile ottenere la funzione densità di probabilità congiunta relativa alle  $n$  variabili a partire dalla conoscenza della funzione densità di probabilità condizionata.

#### **A.4.5. Variabili aleatorie indipendenti**

Le variabili aleatorie  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  si dicono indipendenti se, e solo se, la funzione densità di probabilità congiunta di quante e quali si vogliano variabili tra le  $n$  assegnate è uguale al prodotto delle distribuzioni marginali unidimensionali delle variabili considerate, ossia ad es.

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2) f(x_3) \dots f(x_n) \quad (\text{A.71})$$

E' questo l'unico caso in cui è possibile costruire la funzione densità di probabilità congiunta a partire dalle funzioni densità relative alle singole variabili. E' ovvio che in questo caso la

funzione densità di probabilità condizionata si può esprimere più semplicemente mediante la relazione

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m | x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (\text{A.72})$$

#### A.4.6. Valori caratteristici di una distribuzione bidimensionale

- Valor medio

Siano  $X_1$  e  $X_2$  due variabili casuali continue la cui funzione densità di probabilità congiunta è  $f(x_1, x_2)$ . I valori medi di  $X_1$  e  $X_2$ ,

denominati anche medie marginali, sono definiti rispettivamente da

$$E[X_1] = \mu_{x_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f(x_1) dx_1 \quad (\text{A.73})$$

$$E[X_2] = \mu_{x_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f(x_2) dx_2$$

dove  $f(x_1)$  ed  $f(x_2)$  sono le funzioni densità di probabilità marginali. Le espressioni delle altre rilevanti misure sono quelle appresso riportate.

- Varianza

$$\text{var}[X_1] = \sigma_{x_1}^2 = E[(X_1 - \mu_{x_1})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{x_1})^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{A.74})$$

- Covarianza

$$\text{cov}[X_1, X_2] = \sigma_{x_1, x_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2}) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{A.75})$$

- Coefficiente di correlazione lineare

$$\rho = \rho_{x_1, x_2} = \frac{\text{cov}[X_1, X_2]}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} \quad (\text{A.76})$$

- Valor medio condizionato

$$E[X_2|X_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f(x_2|x_1) dx_2 \quad (\text{A.77})$$

avendo indicato con

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)} \quad (\text{A.78})$$

la funzione densità di probabilità condizionata di  $X_2$  rispetto  $X_1$ .

Si osservi che se le v.a. sono indipendenti risulta:  $E[X_2|X_1] = E[X_2]$

.

#### A.4.7. Valor medio di una funzione di variabili aleatorie

Si consideri una funzione vettoriale  $\varphi$ , di dimensione 1, che faccia corrispondere ad una variabile aleatoria  $\bar{X}$  ad n dimensioni una variabile aleatoria  $\bar{Y}$  ad 1 dimensioni, e cioè

$$\bar{Y} = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (\text{A.79})$$

Il valor medio di tale v.a. può essere determinato generalizzando la (33) e cioè

$$E[\bar{Y}] = E[\varphi(\bar{X})] = \int_{-\infty \dots n \text{ volte}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{A.80})$$

E' facile mostrare che se la funzione vettoriale dipende solo dalle prime m componenti del vettore  $\bar{X}$  (con  $m < n$ ), allora all'interno dell'integrale, che bisogna calcolare per ottenere la media di tale funzione, compare soltanto la funzione densità di probabilità marginale corrispondente alle prime m componenti; infatti, tenendo presente la (68), si ha

$$\begin{aligned}
E[\bar{Y}] &= E[\varphi(X_1, X_2 \dots X_m)] = \int_{-\infty \dots n \text{ volte} \dots}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \dots, x_m) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\
&\int_{-\infty \dots m \text{ volte} \dots}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m \int_{-\infty \dots m \text{ volte} \dots}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n = (A.81) \\
&\int_{-\infty \dots m \text{ volte} \dots}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \dots, x_m) f(x_1, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m
\end{aligned}$$

E' facile, allora verificare che la media di una funzione dipendente da una sola delle componenti del vettore  $\bar{X}$  è fornita dalla seguente relazione

$$E[X_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x_i) dx_i \quad (A.82)$$

dove compare soltanto la funzione densità di probabilità della componente considerata.

#### A.4.8. Matrice di covarianza e di correlazione

Per una variabile aleatoria multidimensionale le covarianze (75) e i coefficienti di correlazione lineare (76) definiscono due insiemi ordinati di  $n \times n$  costanti, denominati rispettivamente matrice di covarianza, [V]

$$[V] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{1n} \\ v_{12} & v_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{1n} & v_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.83})$$

essendo

$$v_{ij} = \text{cov}[X_i, X_j]$$
$$v_{ii} = \text{var}[X_i]$$

matrice di correlazione, [R]

$$[R] = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{1n} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{1n} & \rho_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.84})$$

essendo

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}[X_i, X_j]}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}} = \frac{v_{ij}}{\sqrt{v_{ii} v_{jj}}}$$

La matrice di covarianza [V] è simmetrica (in quanto  $v_{ij}=v_{ji}$ ) ed è definita positiva. Se le v.a. sono indipendenti, essendo  $\text{cov}[X_i, X_j]=0$  la matrice [V] è inoltre diagonale.

Anche la matrice [R] è simmetrica e definita positiva e se le v.a. sono indipendenti essa è uguale alla matrice identità  $I_n$ .

#### **A.4.9. Momenti di una variabile aleatoria multidimensionale**

Data una variabile aleatoria  $\bar{X}$  ad n dimensioni, si definiscono momenti di ordine r della variabile  $\bar{X}$  tutte le possibili medie del tipo

$$E[X_1^t X_2^u \dots X_n^v] \quad \text{con } t+u+\dots+v=r \quad (\text{A.85})$$

Ad esempio, nel caso di una variabile aleatoria bidimensionale  $\mathbf{x}^T=[X_1 X_2]$ , i possibili momenti del secondo ordine sono tre, e precisamente:  $E[X_1^2]$ ,  $E[X_1 X_2]$  ed  $E[X_2^2]$ .

I momenti di ordine  $r$  di una variabile aleatoria ad  $n$  dimensioni possono essere espressi sinteticamente attraverso l'introduzione dell'algebra di Kronecker [31,39]. Infatti, è facile verificare che tutti i possibili momenti di ordine  $r$  di  $\bar{X}$  possono essere raggruppati in un vettore attraverso la relazione:

$$m_r[\bar{X}] = E[\bar{X}^{[r]}] = E[\bar{X} \otimes \dots \text{ r volte } \dots \otimes \bar{X}] \quad (\text{A.86})$$

dove il simbolo  $\otimes$  indica il prodotto di Kronecker e l'esponente all'interno delle parentesi quadre indica l'elevazione a potenza secondo Kronecker.

Si richiamano di seguito alcune delle operazioni fondamentali dell'algebra di Kronecker.

- Prodotto di due matrici

Date due matrici  $A$  e  $B$  di ordine  $(p \times q)$  e  $(s \times t)$ , si definisce "prodotto di Kronecker" e si indica con  $A \otimes B$  la matrice di ordine

(ps x qt) che si ottiene moltiplicando ciascun elemento  $a_{ij}$  di A

per l'intera matrice B e cioè

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}B \\ a_{12}B & a_{22}B & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}B & a_{n2}B & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}B \end{bmatrix} \quad (\text{A.87})$$

E' importante notare che, per potersi effettuare il prodotto di Kronecker, non è necessario che le due matrici A e B siano conformi, così come accade quando se ne vuole effettuare il prodotto classico; quindi la precedente definizione può essere considerata come una generalizzazione dell'operazione di moltiplicazione tra matrici.

Il prodotto di Kronecker è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C \quad (\text{A.88})$$

$$(A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D \quad (\text{A.89})$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \quad (\text{A.90})$$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \quad (\text{A.91})$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad (\text{A.92})$$

- Forma vettorializzata di una matrice

Per forma vettorializzata di una matrice A si intende il vettore colonna ottenuto scrivendo semplicemente le colonne della matrice una dietro l'altra, esso si indica con  $\text{Vec}(A)$ .

Se D è una matrice esprimibile attraverso il prodotto:  $D=ABC$ , allora è valida la relazione:

$$\text{Vec}(D) = (C^T \otimes A) \text{Vec}(B) \quad (\text{A.93})$$

- Potenza secondo Kronecker

Le potenze secondo Kronecker di una matrice A possono essere definite recursivamente come segue

$$A^{[1]} = A; \quad \dots A^{[k+1]} = A \otimes A^{[k]} \quad (\text{A.94})$$

Le potenze di Kronecker sono caratterizzate dalle seguenti proprietà

$$A^{[k+j]} = A^{[k]} \otimes A^{[j]} \quad (\text{A.95})$$

$$(AB)^{[k]} = A^{[k]} B^{[k]} \quad (\text{A.96})$$

#### A.4.10. Funzione caratteristica di v.a. multidimensionale

Analogamente al caso monodimensionale, un vettore di variabili aleatorie  $\bar{X}$  può essere caratterizzato dalla funzione caratteristica multidimensionale  $M_{\bar{X}}(\bar{\theta})$  che è posta in relazione con la funzione densità di probabilità congiunta dall'operatore trasformata di Fourier mediante la posizione

$$M_{\bar{X}}(\bar{\theta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\bar{\theta}\bar{x}) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{A.97})$$

in cui  $\bar{\theta}$  è un vettore di n parametri reali e cioè  $\bar{\theta}^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]$ .

Sviluppando in serie di McLaurin, ed utilizzando la notazione di Kronecker [31,39] si ha inoltre

$$M_{\bar{X}}(\bar{\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} m_j^T[\bar{X}] \bar{\theta}^{[j]} \quad (\text{A.98})$$

#### A.4.11. Log-funzione caratteristica di v.a. multidimensionale

Anche in questo caso la log-funzione caratteristica può essere definita come il logaritmo naturale della corrispondente funzione caratteristica, e cioè

$$\ln[M_{\bar{X}}(\bar{\theta})] = \ln\left[\int_{-\infty \dots n \text{ volte}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\bar{\theta}\bar{x})f(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n\right] \quad (\text{A.99})$$

Dalla precedente, sviluppando in serie di McLaurin ed utilizzando la notazione di Kronecker [31,39], si ricava

$$M_{\bar{X}}(\bar{\theta}) = \exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} k_j^T[\bar{X}]\bar{\theta}^{[j]}\right\} \quad (\text{A.100})$$

in cui compaiono i cumulanti  $k[X]$ , legati ai momenti da relazioni analoghe alle (49).

## **Bibliografia**

1. A.H.S.Ang, "Probabilistic seismic safety and damage assessments of structures" - Proceedings of Ninth World Conference on Earthquake Engineering, Vol.VIII, pagg. 717-728, 1988.
2. Yutaka Matsushima, "Random response of hysteretic single-degree-of-freedom systems subjected to earthquake-like excitations" - Proceedings of Ninth World Conference on Earthquake Engineering, Vol.VIII, pagg. 729-734, 1988.
3. H. Banon & D. Veneziano, "Seismic safety of reinforced concrete members and structures" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, pagg. 179-193, 1982.
4. H. Jensen & W. D. Iwan, "Response variability in structural dynamics" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 20, pagg. 949-959, 1991.
5. Chin-Hsiung Loh & Ri-Chuan Ho, "Seismic damage assessment based on different hysteretic rules" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 19, pagg.753-771, 1990.
6. Yongqi Q. Chen, "Modification of floor response spectrum based on stochastic sensitivity analysis" - Engineering Structure, Vol. 15, pagg. 40-46, 1993.

7. S.H. Zhang, J. Kanda & R. Iwasaki, "Effect of distribution of yield-shear-force-coefficient on the probabilistic seismic safety of existing tall buildings" - Earthquake Engineering, Tenth World Conference, pagg. 3825-3828, 1992.
8. M. Yener & H. Shen, "Structural reliability analysis under earthquake loading" - Earthquake Engineering Tenth World Conference, pagg. 3763-3767, 1992.
9. Chin-Hsiung Loh, Jung-Chi Chang, "Cumulative damage parameters for inelastic system subjected to earthquake excitations: a comparative study" - Engineering Structure, Vol. 14, pagg. 152-162, 1992.
10. M. Rodriguez, "Pseudostatic testing related to damage potential of earthquakes" - pagg. 3911-3914.
11. Chia-Ming Uang, Vitelmo V. Bertero, "Evaluation of seismic energy in structures" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 19, pagg. 77-90, anno 1990.
12. Hazim S. Zibdeh & Kamal A.F. Moustafa, "Free vibration of structural systems with stochastic coefficients" - Engineering Structures, Vol. 13, pagg. 54-58, 1991.

13. A. Kareem & W.-J. Sun, "Dynamic response of structures with uncertain damping" - Engineering Structures, Vol. 12, pagg. 2-8, 1990.
14. S. R. K. Nielsen, K. J. Mork e P. Thoft, "Response analysis of hysteretic multi-storey frames under earthquake excitation" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 18, pagg. 655-666, 1989.
15. A.A.M.F. Cunha, "Structural safety assessment of building structures under earthquake hazard by the stochastic equivalent linearization method" - pagg. 3671-3676.
16. S. L. McCabe & W. J. Hall , "Damage and reserve capacity evaluation of structures subjected to strong earthquake ground motion" - pagg. 3653-3658.
17. Y. Lei & F. Ziegler, "Random response of plane SCWB frames under severe seismic excitation" - Earthquake Engineering, Tenth World Conference, pagg. 3833-3839, 1992.
18. P. Gaspersic, P. Fajfar & M. Fishinger, "An approximate method for seismic damage analysis of buildings" - pagg.3921-3926.

19. Y.J. Park; Y.K. Wen; A.H.S. Ang, "Random vibration of hysteretic system under bi-directional ground motions" - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 14, pagg. 543-557, 1986.
20. C. Meyer, "Random vibration analysis" - CISM Course of modeling of R/C structures. Udine, 1993.
21. C. Meyer, "Dynamic analysis of reinforced concrete frames" - CISM Course of modeling of R/C structures. Udine, 1993.
22. C. Meyer; M.S. L. Roufaiel, "Analytical modeling of hysteretic behavior of R/C frames" - Asce - Journal of Structural Engineering, Vol. 113, pagg. 429-444, 1987.
23. C. Meyer; M.S.L. Roufaiel, "Reliability of concrete frames damaged by earthquakes" - Asce - Journal of Structural Engineering, Vol. 113, pagg. 445-457, 1987.
24. Y.S. Chung; C. Meyer; M. Shinozuka, "Automatic seismic design of reinforced concrete building frames" - Aci - Structural Journal, Vol. 87, pagg. 326-339, 1990.
25. F. Motta, "Un modello per il comportamento isteretico della muratura armata" - Ingegneria Sismica n.2, pagg.19-29, 1988.

26. C. Gavarini, "Dinamica delle strutture," ESA-Roma, 1977.
27. G. Oliveto, "Primi elementi di dinamica delle strutture," Tecnica e ricostruzione, Catania, 1985.
28. F. Motta, "Analisi statica di strutture antisismiche," Liguori ed., Napoli, 1988.
29. F. Motta, "Analisi semplificata della risposta sismica negli edifici regolari in cemento armato," ESA, Roma, 1994.
30. E. Viola, "Esercitazioni di scienza delle costruzioni. Introduzione all'analisi probabilistica delle strutture," Pitagora, Bologna, 1986.
31. F. Casciati, "Dynamic motion, Chaotic and stochastic behaviour," Springer-Verlag, Wien-New York, 1993.
32. R.W. Clough, J. Penzien, "Dynamics of structures," McGraw-Hill, N.Y. 1975.
33. A. E. Kanaan, G.H. Powell, " DRAIN-2D, General purpose computer program for dynamic analysis of inelastic plane structures," University of California, Berkeley, 1973.
34. Y.S. Chung, C.Meyer, M. Shinozuka, "Seismic analysis of reinforced concrete frames," Buffalo, NY, 1988.

35. S. Rodriguez-Gomez, Y.S. Chung, C.Meyer, "Seismic analysis of reinforced concrete frames," Buffalo, NY, 1990.
36. L. Gotusso, "Calcolo numerico," Clup, Milano, 1978.
37. E. Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics," Wiley, N.Y., 1972.
38. S.C. Chapra, R.P. Canale, "Metodi numerici per l'ingegneria" McGraw-Hill, Milano, 1988.
39. G. Falsone, "Calcolo differenziale stocastico per l'analisi di sistemi strutturali soggetti a forzanti non gaussiane," Palermo, 1991.
40. Commissione della Comunità Europea, Eurocodice 8, "Strutture in zone sismiche - Progetto" Parte generale ed edifici, Edizione a cura della Associazione italiana di ingegneria sismica, Roma, 1988.
41. G. Borino et al., "Problemi strutturali nell'ingegneria sismica" - Dario Flaccovio ed., Palermo, 1992.
42. Isaac Elishakoff, "Probabilistic methods in the theory of structures" - John Wiley & Sons, New York, 1983.
43. Heinz Parkus, "Random processes in mechanical sciences" - Springer-Verlag, Wien-NewYork, 1969.

44. J.D.Robson et al., "Random vibrations" - Springer-Verlag, Wien-NewYork, 1971.
45. J.L.Zeman, "Approximate analysis of stochastic processes in mechanics" - Springer-Verlag, Wien-NewYork, 1971.
46. F.Casciati & J.B.Roberts, "Reliability problems: general principles and applications in mechanics of solids and structures" - Springer-Verlag, Wien-NewYork, 1991.
47. E.Cosenza, C.Greco, G.Manfredi, "L'influenza dell'aderenza acciaio-calcestruzzo sul danneggiamento ciclico di elementi in c.a." - 6° Convegno Nazionale - L'ingegneria sismica in Italia, 1993.
48. P.Moerland, C.Nuti, P.E.Pinto, "Risposta dei ponti ad azioni nonsincrone", 6° Convegno Nazionale - L'ingegneria sismica in Italia, 1993.
49. E.Cosenza, G.Manfredi, "La modellazione del degrado strutturale per azioni cicliche di tipo sismico" - 6° Convegno Nazionale - L'ingegneria sismica in Italia, 1993.
50. F.Casciati, L.Faravelli, "Fragility analysis of complex structural systems" - Research Studies Press LTD, London, 1991.
51. M.R. Spiegel, "Statistica" - Etas, Milano, 1973.

52. E. Perri, "Moderna ingegneria antisismica" - UTET, Torino, 1971.
53. P.Fajfar, H.Krawinkler, "Nonlinear seismic analysis and design of reinforced concrete buildings" - Elsevier, London, 1992.
54. E. Cosenza, G. Manfredi, "La fatica plastica in ingegneria sismica" - Ingegneria Sismica, anno X - n°2, pagg. 39-46, 1993.
55. Y. J. Park, A. H-S. Ang, Y. K. Wen, "Seismic damage analysis and damage-limiting design of R. C. buildings" - Civil Engineering Studies, Report SRS n°516, University of Illinois, Urbana, 1984.
56. S. K. Kunnath, A. M. Reinhorn, Y. J. Park, "Analytical modeling of inelastic seismic response of R. C. structures" - Journal of structural engineering, ASCE, vol. 116, n°4, pagg. 996-1017, 1990.